



***Республиканская
физическая
олимпиада
(III этап)
2007 год***

***Теоретический тур
Решения задач***

9 класс.

Задание 1. «Рабочая разминка»

Для того, чтобы упростить работу со схемой оценивания, в решении числами в круглых скобках пронумерованы не только формулы, но и численные ответы и идеи (которые, кроме того, подчеркнуты).

Решение.

1.1.1 На длине параллелепипеда, в который складывают плитки, уложится $N_A = A/a = 10$ плиток, на ширине $N_B = B/b = 10$ плиток и на высоте $N_C = C/c = 20$ плиток. Плитки будут лежать в N_C слоев по $N_A N_B$ плиток в каждом.

1) Работа против силы тяжести при подъеме груза массой m на высоту h равна

$$A_0^* = mgh. \quad (1)$$

Для того, чтобы положить плитку в первый слой, необходимо вынуть ее из мостовой и поднять на высоту c , совершив работу mgc . Чтобы положить плитку во второй слой, ее надо поднять на высоту $2c$, т.е. совершить работу $2mgc$. Аналогично, для того, чтобы положить плитку в слой номер n , надо совершить работу $nmgc$.

Работа, совершаемая при укладке:

$$\text{первого слоя } A_1^* = mgcN_A N_B,$$

$$\text{второго слоя } A_2^* = 2mgcN_A N_B,$$

.....

$$n\text{-ого слоя } A_n^* = nmgcN_A N_B,$$

.....

Полная работа по укладке кирпичей $A^* = A_1^* + A_2^* + \dots + A_{N_C}^* = \sum_{n=1}^{N_C} A_n^*$.

$$A^* = mgcN_A N_B (1 + 2 + \dots + N_C) = mgcN_A N_B \frac{N_C(N_C + 1)}{2} = \frac{mgc}{2} \frac{A}{a} \frac{B}{b} \frac{C}{c} \left(\frac{C}{c} + 1 \right) \quad (2)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$A = mg \frac{ABC(C+c)}{2abc} = 10 \cdot 10 \frac{2,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 \cdot 1,05}{2 \cdot 0,20 \cdot 0,20 \cdot 0,05} = 105 \text{ кДж}. \quad (3)$$

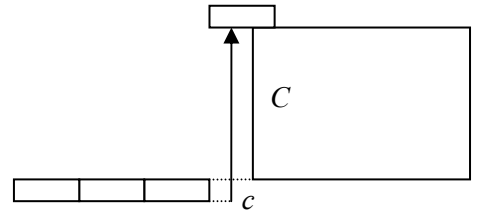
1.1.1 (альтернативный вариант). Минимальная работа равна изменению потенциальной энергии системы. Легко заметить, что параллелепипед состоит из целых плиток. Его полная масса равна

$$M = m \frac{ABC}{abc}.$$

В ходе «строительства» штабеля центр масс системы поднимается на высоту $\Delta h = \frac{C}{2} + \frac{c}{2}$, поэтому изменение потенциальной энергии (то есть совершенная работа) равно

$$A = Mg\Delta h = mg \frac{ABC(C+c)}{2abc}.$$

1.1.2. Для того чтобы положить любую плитку в ящик, надо поднять ее над бортиком (4), поэтому каждую плитку надо поднять на высоту $C + c$ (вниз их опустит сила тяжести) и совершить работу $mg(C + c)$. Всего плиток $N_A N_B N_C$, поэтому полная работа будет равна



$$A^* = N_A N_B N_C mg(C + c) = mg(C + c) \frac{A}{a} \frac{B}{b} \frac{C}{c} \quad (5)$$

$$A^* = 210000 \text{ Дж} = 210 \text{ кДж} \quad (6)$$

1.1.3. Каждый слой пирамиды будет квадратным, поскольку на высоте пирамиды уложится $N_H = \frac{H}{c} = 10$ плиток и на обеих сторонах основания уложится $\frac{L}{a} = \frac{L}{b} = 10$ плиток.

На длине основания 1^{ого} слоя уместится 10 плиток.

На длине основания 2^{ого} слоя уместится 9 плиток.

На длине основания n -ого слоя уместится $11 - n$ плиток.

В n -ом слое будет $(11 - n)^2$ плиток, (7)

причем каждую из них необходимо поднять на высоту nc , тогда работа на укладку плиток n -ого слоя будет равна

$$A_n^* = mgcn(11 - n)^2 \quad (8)$$

Полная работа, которую надо затратить на укладку пирамиды, равна

$$A^* = \sum_{n=1}^{N_H} A_n^* = \sum_{n=1}^{N_H} mgcn(11 - n)^2 = mgc \sum_{n=1}^{N_H} (n^3 - 22n^2 + 121n) = mgc \left(\sum_{n=1}^{N_H} n^3 - 22 \sum_{n=1}^{N_H} n^2 + 121 \sum_{n=1}^{N_H} n \right).$$

Необходимые суммы приведены в условии задачи, поэтому

$$\begin{aligned} A^* &= mgc \left(\frac{N_H^2 (N_H + 1)^2}{4} - 22 \frac{N_H (N_H + 1)(N_H + 2)}{6} + 121 \frac{N_H (N_H + 1)}{2} \right) = \\ &= mgc \frac{N_H (N_H + 1)}{2} \left[\frac{N_H (N_H + 1)}{2} - \frac{22}{3} (N_H + 2) + 121 \right] = \\ &= mgc \frac{H/c (H/c + 1)}{2} \left[\frac{H/c (H/c + 1)}{2} - \frac{22}{3} (H/c + 2) + 121 \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$A^* = 24200 \text{ Дж} = 24,2 \text{ кДж} \quad (10)$$

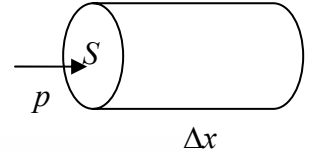
2.1. Насос может создавать давление $P = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Это означает, что он сможет поднять воду на высоту не большую, чем

$$h_{\max} = \frac{P}{\rho g}. \quad (11)$$

Поднять на большую высоту не позволит гидростатическое давление.

В случае 2.1.1 насос сможет наполнить бассейн до уровня h_{\max} , при этом объем закачанной воды будет равен

$$V = ABh_{\max} = AB \frac{P}{\rho g}. \quad (12)$$



Для того чтобы найти работу, совершенную насосом, рассмотрим небольшой промежуток времени, за который насос по шлангу закачал малый объем воды $\Delta V = S\Delta x$, где S - площадь поперечного сечения шланга. На воду при этом действует со стороны насоса сила $F = pS$,

а ее работа при этом равна $\Delta A^* = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V$.

Полная работа, которую совершит насос,

$$A^* = P \sum \Delta V = PV = PAB \frac{P}{\rho g} = \frac{ABP^2}{\rho g} \quad (13)$$

$$A^* = 100000 \text{ Дж} = 100 \text{ кДж} \quad (14)$$

Стоит отметить, что работа, совершенная насосом в 2 раза больше изменения потенциальной энергии воды

$$\Delta W = Mg \frac{h_{\max}}{2} = ABh_{\max} \rho g \frac{h_{\max}}{2} = \frac{AB\rho g P^2}{2\rho^2 g^2} = \frac{ABP^2}{2\rho g}.$$

Дело в том, что на воду в шланге действует не только сила со стороны насоса, но и сила гидростатического давления со стороны воды, уже закачанной в бассейн. Равнодействующая этих сил не равна нулю (становится равной нулю только, когда высота воды в бассейне достигнет h_{\max}), поэтому вода в шланге движется с ускорением и работа насоса идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии воды. (15)

Вода в бассейне будет двигаться, но, в конце концов, успокоится благодаря силам вязкого трения.

2.2. В случае 2) закачка воды просто не начнется. По шлангу, переброшенному через борт бассейна, надо поднять воду как минимум на высоту $C = 1 \text{ м}$, а насос может поднять воду не выше, чем на $h_{\max} = 0,5 \text{ м}$. (12)

Соответственно, никакой работы насос совершить не сможет, поэтому

$$A^* = 0 \text{ Дж} \quad (16)$$

1.3 Чтобы снести песок в пирамиду, необходимо совершить не только работу против силы тяжести A_m^* , но ещё и работу A_{mp}^* против силы трения, действующей на песчинки при сметании.

Работа против силы тяжести, идущая на увеличение потенциальной энергии песчинок, равна

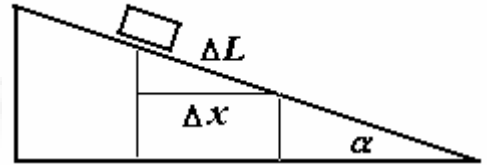
$$A_m^* = Mgh_c, \quad (18)$$

где M - масса пирамиды, h_c - высота центра масс пирамиды от основания.

$$A_m^* = \rho Vgh_c = \rho \frac{1}{3} SHg \frac{H}{4} = \frac{\rho g L^2 H^2}{12}. \quad (19)$$

Заметим, что работа силы трения при движении по наклонной плоскости полностью определяется горизонтальным смещением. Действительно, пусть тело находится на наклонной плоскости. Тогда сила трения, действующая на него равна

$$F = \mu mg \cos \alpha.$$



Тогда при смещении тела на расстояние ΔL вдоль наклонной плоскости будет совершена работа

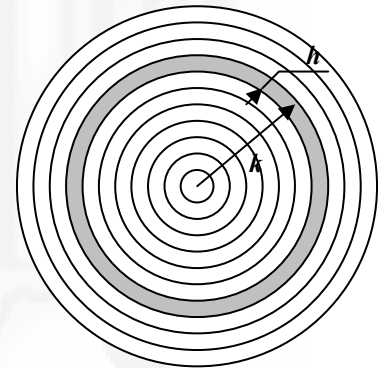
$$A = F\Delta L = \mu mg\Delta L \cos \alpha = \mu mg\Delta x \quad (20)$$

и не зависит от угла наклона. Обобщая данный результат, следует заключить, что при движении по поверхности любого профиля работа силы трения (или равная ей работа внешней силы по преодолению трения) полностью определяется горизонтальным смещением по формуле (20), если, конечно, не учитывать ускорения, могущие возникнуть при движении тела.

Найдем работу, совершаемую против силы трения при сметании песка. Очевидно, что для сметания песчинок, находящихся на разном расстоянии от центра круга, необходимо совершить разную работу. Разобьем круг на большое количество N_R колец толщиной $h = R/N_R$.

$$h = R/N_R. \quad (21)$$

Кольцо номер k , считая от центра, будет иметь радиус $r_k = kh$ и площадь $S_k = 2\pi r_k h = 2\pi h^2 k$.



Масса всего песка внутри круга равна массе песка в пирамиде

$$M = \rho V = \rho \frac{SH}{3} = \frac{\rho L^2 H}{3},$$

причем этот песок находится в круге площадью $S = \pi R^2$.

В кольце номер k находится песок массой

$$m_k = M \frac{S_k}{S} = \frac{\rho L^2 H}{3} \frac{2\pi h^2 k}{\pi R^2} = \frac{2\rho L^2 H h^2}{3R^2} k \quad (22)$$

При сметании песка из кольца k на него действует сила трения $F_k = \mu g m_k$, а минимальная работа против нее (если сметать по радиусу) работа равна

$$A_k^* = \mu g m_k r_k = \mu g \frac{2\rho L^2 H h^2}{3R^2} k h k = \frac{2\mu g \rho L^2 H h^3}{3R^2} k^2 \quad (23)$$

Отметим, что радиус площадки значительно превышает длину основания кучи, поэтому можно считать, что все песчинки сметаются в центр круга.

Полная работа по преодолению сил трения при сметанию песка к центру равна

$$A^*_{mp} = \sum_{k=1}^{N_R} A^*_k = \sum_{k=1}^{N_R} \frac{2\mu g \rho L^2 H h^3}{3R^2} k^2 = \frac{2\mu g \rho L^2 H h^3}{3R^2} \sum_{k=1}^{N_R} k^2 = \frac{2\mu g \rho L^2 H h^3}{3R^2} \frac{N_R(N_R+1)(N_R+2)}{6}. \quad (24)$$

Так как мы разбили круг на очень большое количество колец $N_R \gg 1$, то единицей и двойкой по сравнению с N_R можно пренебречь.

Кроме того, надо вспомнить, что $h = R/N_R$, тогда

$$A^*_{mp} = \frac{2\mu g \rho L^2 H (h^3 N_R^3)}{3R^2 \cdot 6} = \frac{2\mu g \rho L^2 H R^3}{18R^2} = \frac{\mu g \rho L^2 H R}{9} \quad (25)$$

Полная работа по сметанию песка в пирамиду равна

$$A^* = \frac{\rho g L^2 H^2}{12} + \frac{\mu g \rho L^2 H R}{9} = \frac{\rho g L^2 H}{3} \left(\frac{H}{4} + \frac{\mu R}{3} \right) \quad (26)$$

$$A^* = 820000 \text{ Дж} = 820 \text{ кДж}$$

Задание 2. «Водная феерия»

2.1 При открывании крышки давление упадет до нормального атмосферного, при этом вода окажется перегретой – начнется вскипание, которое будет продолжаться до тех пор, ее температура не понизится до температуры кипения при нормальном атмосферном давлении, то есть до $t_1 = 100^\circ\text{C}$. При это теплота, выделившаяся при остывании воды пойдет на испарение ее части Δm . Уравнение теплового баланса в этом случае примет вид

$$L\Delta m = c_1 m(t_0 - t_1), \quad (1)$$

из которого легко определить долю выкипевшей воды

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_0 - t_1)}{L} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot (120 - 100)}{2,2 \cdot 10^6} \approx 3,8 \cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Иными словами, выкипит около 4% воды.

2.2 При кристаллизации выделяется теплота, которая расходуется на нагревание оставшейся воды. Процесс кристаллизации будет продолжаться до тех пор, пока температура воды не станет равной $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Уравнение теплового баланса в данном случае принимает вид

$$\lambda \Delta m = c_1 m(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_1 - t_0)}{\lambda} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot (0 - (-5))}{330 \cdot 10^3} \approx 6,3 \cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Примечание: Малость доли воды, претерпевающей фазовый переход, позволяет пренебречь изменением теплоемкости смеси при фазовых превращениях.

2.3 В зависимости от количества впущенного пара могут реализовываться различные конечные состояния воды в сосуде: только лед, лед и жидкость, жидкость, жидкость и пар. Последовательно рассмотрим возможные процессы и конечные равновесные состояния при увеличении количества впущенного пара.

1. *Пар сконденсировался, образовавшаяся вода остыла до температуры замерзания и частично замерзла – при этом температура льда не достигла температуры плавления.*

В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$Lm + c_1 m(t_1 - t_{нл.}) + \lambda m + c_0 m(t_{нл.} - t_x) = c_0 m_0(t_x - t_0), \quad (1)$$

здесь и далее: m - масса впущенного пара, t_x - температура, установившаяся в сосуде после установления теплового равновесия, $t_{нл.} = 0,0^\circ\text{C}$ - температура плавления льда.

Из уравнения (1) находим требуемую зависимость:

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m(t_1 - t_{нл.}) + \lambda m + c_0 m t_{нл.} + c_0 m_0 t_0}{c_0 m + c_0 m_0}. \quad (2)$$

Подставляя численные значения характеристик воды (удобно теплоту измерять в кДж, а массы в граммах), получим функцию

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m(t_1 - t_{нл.}) + \lambda m + c_0 m t_{нл.} + c_0 m_0 t_0}{c_0 m + c_0 m_0} = \frac{(2200 + 4,2 \cdot 100 + 330)m + 2,1 \cdot 300 \cdot (-10)}{2,1 \cdot (300 + m)} = \frac{2950m - 6300}{6300 + 2,1m} \quad (3)$$

Температура льда достигнет нуля, при массе впущенного пара равной $m_1 = \frac{6300}{2950} \approx 2,1 \text{ г}$.

Так как эта масса мала, то зависимость (3) является примерно линейной. Этот участок на графике обозначен «0-1».

2. *Количество пара превысило найденной значение $m_1 \approx 2,1 \text{ г}$. При этом лед начал плавиться, но пара «не хватает», чтобы расплавить весь лед.* В этом случае в сосуде в состоянии равновесия окажется смесь льда и воды, находящаяся при температуре $t_{нл.} = 0,0^\circ\text{C}$. Найдем массу пара m_2 , при которой количество теплоты, выделившейся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, будет достаточно, чтобы нагреть лед до температуры плавления и полностью его расплавить. Из уравнения теплового баланса

$$Lm_2 + c_1 m_2(t_1 - t_{нл.}) = c_0 m_0(t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 \quad (4)$$

находим

$$m_2 = \frac{c_0 m_0(t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0}{L + c_1(t_1 - t_{нл.})} = \frac{2,1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300}{2200 + 4,2 \cdot 100} \approx 40 \text{ г}. \quad (5)$$

Таким образом, при массе пара от $m_1 \approx 2,1 \text{ г}$ до $m_2 \approx 40 \text{ г}$ температура установившаяся в сосуде будет равна $t_{нл.} = 0,0^\circ\text{C}$ (участок «1-2» на графике).

3. *Весь лед расплавился, образовавшаяся при этом вода стала нагреваться.* В этом случае тепловой баланс имеет вид: теплота, выделившаяся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, расходуется на нагревание льда, его плавление и нагревание талой воды до равновесной температуры t_x , или на языке уравнения:

$$Lm + c_1 m(t_1 - t_x) = c_0 m_0(t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0(t_x - t_{нл.}). \quad (6)$$

Из этого уравнения определяем

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m t_1 - c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) - \lambda m_0}{c_1 m + c_1 m_0} =$$

$$= \frac{2200m + 4,2 \cdot 100m - 2,1 \cdot 300 \cdot 10 - 330 \cdot 300}{4,2m + 4,2 \cdot 300} = \frac{2620m - 105300}{4,2m + 1260} \quad (7)$$

Это участок на графике обозначен «2-3». Конечная температура достигнет температуры конденсации $t_1 = 100^\circ\text{C}$, если масса впускаемого пара превысит значение m_3 , которое также можно определить из уравнения (6), в котором следует положить $t_x = t_1$:

$$Lm_3 = c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{нл.}). \quad (8)$$

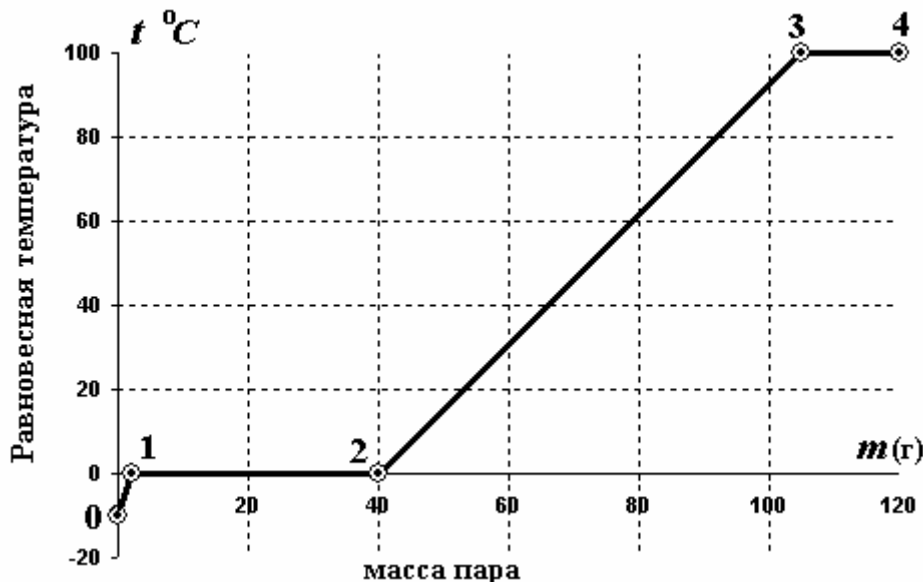
Или

$$Lm_3 = c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{нл.})$$

$$m_3 = \frac{c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{нл.})}{L} =$$

$$= \frac{2,1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300 + 4,2 \cdot 300 \cdot 100}{2200} \approx 105 \text{ г} \quad (9)$$

При дальнейшем увеличении массы пара конечная температура не превысит $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Требуемый график показан на рисунке.



Отметим, что наклонные участки, строго говоря, не прямолинейны. Однако эти отклонения незначительны.

Задание 3. «Опыт Араго»

1. Необходимо, чтобы лучи отражённые от зеркальца 31, попали на зеркало 32. Это возможно при

$$\frac{90^\circ - \theta}{2} < \varphi < 45^\circ \quad (1),$$

$$40^\circ < \varphi < 45^\circ \quad (2),$$

и, т.к. зеркальце двухстороннее,

$$\frac{90^\circ - \theta}{2} + 180^\circ < \varphi < 45^\circ + 180^\circ \quad (3),$$

$$220^\circ < \varphi < 225^\circ \quad (4).$$

2. Ход лучей показан на рисунке.

После отражения от сферического зеркала лучи идут под углом

$$\delta = \frac{d}{R} \quad (5)$$

по отношению к первоначальному направлению. После вторичного отражения от зеркальца, пучок расходится под углом равным 2δ . Тогда диаметр пятна на экране

$$D = d + 2 \frac{d}{R} L = 25 \text{ мм} \quad (6)$$

3. При вращении зеркальца, за время τ , необходимое свету для того, чтобы «слетать» от зеркальца 31 до зеркала 32 и обратно, зеркальце повернётся на угол ξ . Лазерный луч повернётся на угол 2ξ и пятно сместится на некоторое расстояние. Направление смещения зависит от направления вращения зеркальца. Величина

$$\tau = 2 \frac{R}{c} \quad (7),$$

тогда

$$\xi = 2\pi \cdot \nu \cdot \tau \quad (8).$$

Величина смещения:

$$x = 2\xi L = 8\pi \cdot \nu \cdot \frac{R}{c} L = 8,4 \text{ мм} \quad (9).$$

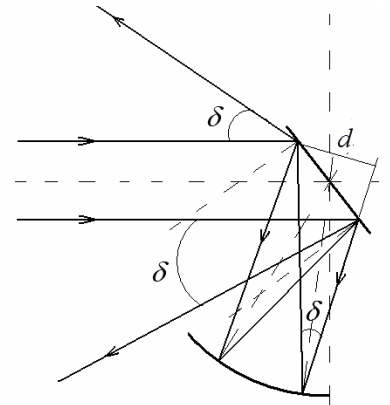
4. При вращении зеркальца пятно будет состоять из двух одинаковых пятен, центры которых не совпадают. При увеличении скорости вращения расстояние между центрами пятен будет увеличиваться. Пятна будут сдвигаться в одну и ту же сторону.

5. Пятна будут разделены, если расстояние между их центрами станет равно диаметру D .

$$\Delta x = 8\pi \cdot \nu' \cdot \frac{R}{c} L \cdot (n-1) = D \quad (10).$$

Откуда и получаем значение частоты вращения:

$$\nu' = \frac{D \cdot c}{8\pi(n-1) \cdot R \cdot L} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ об/с} \quad (11).$$



10 класс.

Задание 1. «Просто разминка»

1.1 Очевидно, что скорость трактора равна $V = \frac{V_0}{2} = 1,0 \frac{м}{с}$.

1.2 Дальность полета снаряда, выпущенного из неподвижного орудия, определяется формулой

$$S_0 = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha . \quad (1)$$

где V_0 - скорость снаряда относительно ствола.

Чтобы достичь максимальной дальности, выстрел, очевидно, необходимо производить в направлении движения платформы. В этом случае к горизонтальной составляющей скорости снаряда относительно пушки добавится скорость движения платформы, поэтому закон движения снаряда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= (V_0 \cos \alpha + v_1)t \\ y &= V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} . \end{aligned} \quad (2)$$

Определим время полета снаряда (из условия $y = 0$): $t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$ и подставим его в

выражение для горизонтальной координаты для определения дальности полета

$$S_1 = (V_0 \cos \alpha + v_1) \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 + \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} \right) .$$

Таким образом, относительное увеличение дальности полета составит

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%$$

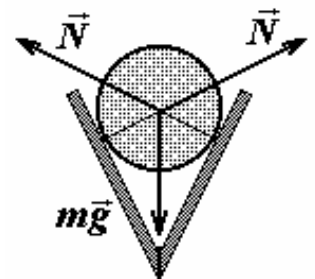
При наличии понимания, решение может быть получено почти мгновенно:

- так как время полета снаряда определяется только вертикальной составляющей скорости, то оно не зависит от скорости платформы;
- дальность полета (при постоянном времени движения) пропорциональна горизонтальной составляющей скорости снаряда;

- следовательно, $\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{(V_0 \cos \alpha + v_1) - V_0 \cos \alpha}{V_0 \cos \alpha} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%$.

1.3 Чтобы сдвинуть цилиндр, к нему необходимо приложить силу, превышающую силу трения.

Изобразим силы, действующие на цилиндр в проекции на вертикальную плоскость. Так как силы реакции направлены перпендикулярно поверхности, то тройка сил: две силы реакции и сила тяжести направлены под равными углами 120° друг к другу. Так проекция ускорения на вертикальную плоскость равна нулю, то сумма изображенных сил также равна нулю. Следовательно, модули этих сил равны, то есть $N = mg$. Таким образом, суммарная сила трения (и искомая сила) равна $F_{\text{тр}} = 2\mu N = 2\mu mg = 12H$.



1.4 Суммарная сила давления воды на дно и стенки сосуда по модулю равна силе тяжести и направлена в противоположную сторону: $\rho ghS + F_{cm.} = mg$. Из этого уравнения находим $F_{cm.} = mg - \rho ghS \approx -10H$, т.е. эта сила направлена вверх.

1.5 Обозначим начальную скорость второго шарика u_0 и найдем скорости шариков v_1 и v_2 после первого столкновения (Рис.1), используя уравнения законов сохранения импульса и механической энергии

$$m_2 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (1)$$

$$\frac{m_2 u_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (2)$$

Для быстрого решения этой системы уравнений перепишем ее в виде

$$m_2 (u_0 - v_2) = m_1 v_1, \quad (3)$$

$$m_2 (u_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2. \quad (4)$$

и разделим второе уравнение на первое. При этом мы, конечно, теряем одно решение системы

$$v_2 = u_0, v_1 = 0, \quad (5)$$

но это решение соответствует начальным условиям – скоростям шарика до удара, а нам необходимо второе решение:

$$u_0 + v_2 = v_1.$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (1) позволяет легко найти интересующее нас решение

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} u_0, \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} u_0. \quad (6)$$

Понятно, что скорость первого шарика больше скорости второго, поэтому, совершив полный оборот, первый шарик догонит второй в некоторой точке A_1 , повернутой относительно исходной на некоторый угол φ (Рис. 1).

Для определения этого угла заметим, что до второго удара первый шарик пройдет путь

$$S_1 = (2\pi + \varphi)R \quad (7)$$

за время

$$t_1 = \frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1}. \quad (8)$$

Аналогично, для второго шарика можно записать

$$S_2 = \varphi R, \quad t_2 = \frac{\varphi R}{v_2}. \quad (9)$$

Приравнивая времена движения шариков, получим уравнение

$$\frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1} = \frac{\varphi R}{v_2}. \quad (10)$$

из которого определим искомый угол φ , задающий положение точки столкновения

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1}. \quad (11)$$

Вычислим значение этого угла, используя выражения для скоростей (6)

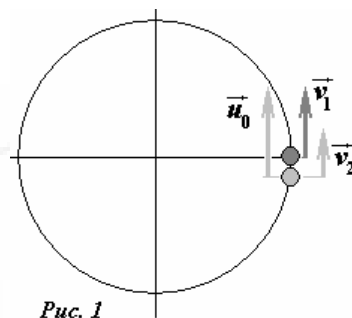


Рис. 1

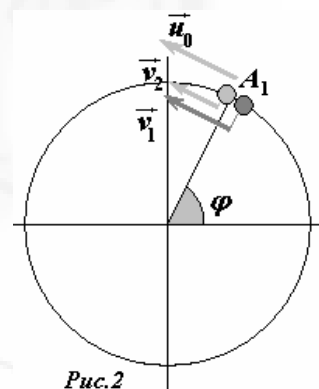


Рис. 2

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2m_2}{m_2 - m_1} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2 \cdot 30}{30 - 20} - 1} \approx \frac{2}{5} \pi. \quad (12)$$

Таким образом, мы определили точку второго столкновения. Для определения скоростей шариков после этого удара, следует составить систему уравнений, аналогичную (1)-(2). Однако подробно ее решать нет необходимости, так как ответ почти очевиден: если при начальных условиях (5) решением выражаются формулами (6), то теперь (6) являются начальными условиями, следовательно, решение выражается формулами (5). Иными словами, после второго удара шарики восстановят свои начальные скорости – второй будет двигаться со скоростью u_0 , а первый остановится! После второго удара второй шарик сделает полный оборот и столкнется с первым в той же точке A_1 . После этого повторится рассмотренная ситуация (только повернутая на угол φ): первый догоняет второй и т.д. Эти рассуждения позволяют указать точки всех столкновений шариков (Рис.3). Простым перечислением легко определить, что тринадцатое столкновение произойдет в точке, повернутой относительно исходного положения на угол, равный

$$\varphi_{13} = \frac{1}{5} \pi \approx 72^\circ.$$

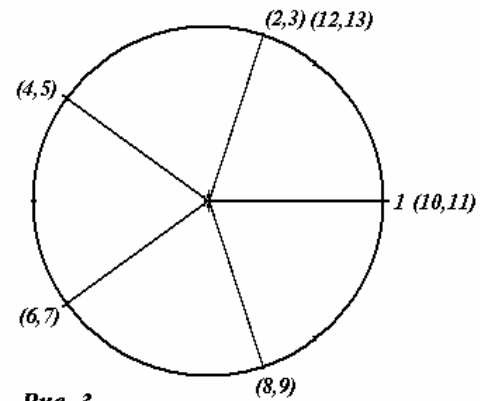


Рис. 3

Задание 2. «Вес и сжатие»

1. «Самосжатие»

1.1 Рассмотрим слой воды малой толщины Δh_i , находящийся на глубине h_i . Уменьшение объема ΔV_i рассматриваемого слоя вследствие сжимаемости жидкости запишем как

$$\Delta V_i = V_0(1 - \beta \cdot p) - V_0 = -V_0 \beta p = -S \Delta h_i \beta p,$$

где S — площадь рассматриваемого слоя.

Для оценки будем считать, что плотность жидкости остается приблизительно постоянной, тогда толщина сжатого слоя Δh_i^*

$$\Delta h_i^* = \Delta h_i(1 - \beta \cdot p) = \Delta h_i(1 - \beta \cdot \rho_0 g h_i),$$

где ρ_0 — плотность несжатой жидкости, g — ускорение свободного падения.

Соответственно, уменьшение δh_i его высоты вследствие эффекта самосжатия найдем как

$$\delta h_i = \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i \quad (1)$$

Для нахождения полного сжатия ΔH всей жидкости просуммируем (1) по всем глубинам h_i

$$\Delta H = \sum_i \delta h_i = \sum_i \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \sum_i h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \frac{H^2}{2}. \quad (2)$$

Расчет для мирового океана дает

$$\Delta H = 238 \text{ м.}$$

1.2 «Плотность» С учетом эффекта самосжатия найдем плотность ρ реальной жидкости на глубине h

$$\rho(h) = \frac{m_i}{V_i} = \frac{m_i}{V_0(1 - \beta p_i)} = \frac{m_i}{V_0(1 - \beta \rho_0 g h)} \approx \rho_0(1 + \beta \rho_0 g h). \quad (3)$$

В (2) учтено, что параметр β (сжимаемость воды) очень мал, поэтому можно с достаточной точностью использовать приближение для малых x

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x.$$

Соответственно, относительное увеличение плотности воды в процентах на глубине H найдем как

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \cdot 100\% = \beta \rho_0 g H \cdot 100\% = 4,76\%. \quad (4)$$

Поскольку данные в условии задачи приведены с точностью до трех значащих цифр, то в ответе (4) (и далее!) мы также будем оставлять три значащие цифры.

Как видим из (4) даже при больших глубинах мирового океана относительное изменение плотности морской воды незначительно и составляет несколько процентов. Это позволяет считать жидкости практически несжимаемыми при решении ряда прикладных задач.

1.3 «Давление» Для вычисления давления $p(h)$ реальной жидкости на глубине h необходимо просуммировать давления, создаваемые более высокими тонкими слоями Δh_i , которые, согласно закону Паскаля, передаются нижним слоям

$$p(h) = \sum_i p_i = \sum_i \rho_i g \Delta h_i = g \sum_i \rho_i \Delta h_i, \quad (5)$$

где ρ_i — плотность жидкости на глубине i -го слоя.

Сумма в выражении (4), есть площадь S под графиком $\rho(h)$ зависимости (2) плотности жидкости от глубины, т.е. площадь трапеции (рис. 02).

Следовательно

$$p(h) = \frac{\rho_0 + \rho_0(1 + \beta \rho_0 g h)}{2} h = \rho_0 g h \left(1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h\right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что искомая зависимость представляет собой параболу с малым коэффициентом нелинейности.

С учетом того, что атмосферное давление p_0 также передается по закону Паскаля, окончательно получим

$$p(h) = p_0 + \rho_0 g h \left(1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h\right). \quad (7)$$

1.4 «Утонувший летучий голландец» Предмет перестанет тонуть и будет находиться в состоянии устойчивого равновесия на некоторой глубине при условии, что его плотность будет равна плотности морской воды на этой глубине.

Следовательно, плотность утонувшего летучего голландца можно найти, подставив в выражение (3) искомую глубину $h = 5,00 \text{ км}$

$$\rho(h) = \rho_0(1 + \beta \rho_0 g h).$$

Расчет с точностью до трех значащих цифр дает

$$\rho_1 = 1,05 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

2. «Заряженная жидкость» В данном пункте рассматривается несжимаемая жидкость.

2.1 Рассмотрим верхний слой жидкости глубиной h (рис. 03). Действующая на него сверху сила атмосферного давления $p_0 S$ и сила его тяжести $F_1 = \rho g h S$ уравновешиваются силой давления снизу $p(h) S$ и силой электростатического отталкивания \vec{F}_2 слоя толщиной h слоем толщиной $(H-h)$.

Напряженность электростатического поля, создаваемого слоем толщиной $(H-h)$ вне его может быть найдена, как

$$E(H-h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\gamma(H-h)}{2\epsilon_0}.$$

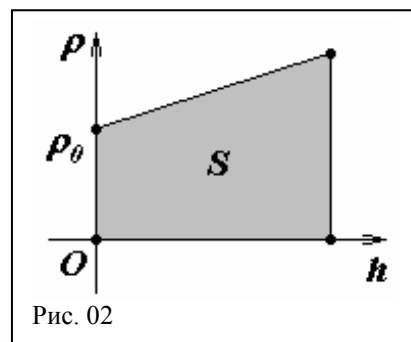


Рис. 02

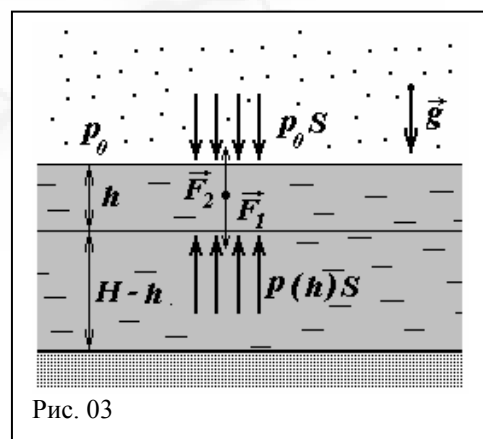


Рис. 03

Заряд слоя толщиной h найдем по определению объемной плотности заряда

$$q(h) = \gamma \cdot V = \gamma h S.$$

Следовательно, сила электростатического отталкивания верхнего слоя нижним равна

$$F_2 = E(H-h) \cdot q(h) = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS. \quad (8)$$

В результате условие равновесия слоя глубиной h примет вид

$$p_0S + \rho ghS = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS + p(h)S.$$

Сокращая в последнем выражении на площадь S слоя, получим искомую зависимость давления в заряженной жидкости от глубины

$$p(h) = p_0 + \left(\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0}\right)h + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} h^2. \quad (9)$$

2.2 Выражение (8) представляет собой квадратичную зависимость (параболу), ветви которой направлены вверх.

При малых h ($h \rightarrow 0$) ее «поведение» определяется линейным членом, который, в зависимости от толщины пластины H может быть как положительным, так и отрицательным. При максимально возможной толщине пластины H_{max} линейный член должен быть равен нулю.

При этом верхние слои жидкости станут невесомы, т.е. $p(h \rightarrow 0) \approx p_0$. Отсюда найдем

$$\rho g = \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0} \Rightarrow H_{max} = \frac{2\rho g \varepsilon_0}{\gamma^2}. \quad (10)$$

При дальнейшем увеличении толщины заряженного слоя верхние частицы жидкости будут отрываться и улетать вверх, образуя «электрическое испарение».

2.3 Кубик некоторой массы, погруженный в заряженную жидкость, будет находиться в равновесии, если сила его тяжести будет уравновешена силой Архимеда.

Погружение кубика в заряженную жидкость не изменит распределения ее давления в нижележащих слоях.

Это позволяет записать следующее уравнение

$$mg = \left(\left(\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0}\right)a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2\right) \cdot a^2.$$

Отсюда найдем искомое значение массы кубика

$$m = \frac{\left(\left(\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0}\right)a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2\right) \cdot a^2}{g}. \quad (11)$$

Задание 3. «Осторожней на поворотах»

1. Легко заметить из рисунка 1, что наличие угла увода у передних колёс уменьшает угол поворота, а у задних – увеличивает. Т.е.

$$\theta = \xi - \varphi_{II} + \varphi_3 \quad (1)$$

2. Нагрузки на колёса равны силам реакции дороги на эти колёса. Для нахождения этих величин необходимо записать второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, а также уравнения для равенства моментов относительно нескольких осей, чтобы получить четыре независимых уравнения. Однако можно поступить проще. Если автомобиль покоится, то силы реакции определить не трудно:

$$\begin{aligned} N_{II}^0 &= N_{III}^0 = \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} \\ N_{3II}^0 &= N_{3III}^0 = \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} \end{aligned} \quad (2).$$

При левом повороте, к правым колёсам приложится дополнительная нагрузка $\Delta N = \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d}$, а сила, действующая на левые колёса, наоборот уменьшится на эту величину. Получим:

$$\begin{aligned} N_{II} &= \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} - \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{III} &= \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} + \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{3II} &= \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} - \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{3III} &= \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} + \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \end{aligned} \quad (3).$$

3. Запишем условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$(F_{II} + F_{III}) \cdot a = (F_{3II} + F_{3III}) \cdot b \quad (4),$$

т.е. автомобиль не вращается. Подставляя значения сил, получим:

$$(k\varphi_{II} N_{II} + k\varphi_{III} N_{III}) \cdot a = (k\varphi_3 N_{3II} + k\varphi_3 N_{3III}) \cdot b \quad (5)$$

или

$$\varphi_{II} \cdot a \cdot (N_{II} + N_{III}) = \varphi_3 \cdot b \cdot (N_{3II} + N_{3III}) \quad (6).$$

Подставив значения нагрузок, получим:

$$\varphi_{II} = \varphi_3 \quad (7),$$

а значит

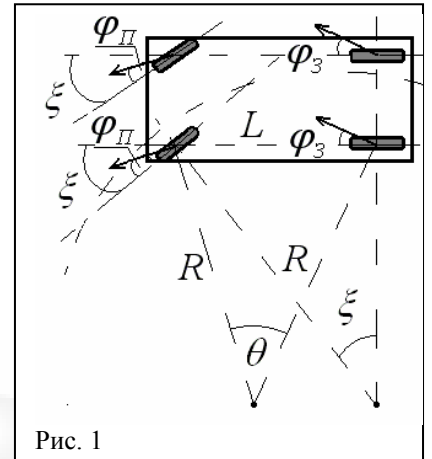
$$\theta = \xi \quad (8)$$

– нейтральная поворачиваемость.

4. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота»:

$$F_{III} + F_{II} + F_{3II} + F_{3III} = \frac{Mv^2}{R} \quad (9)$$

или, подставляя значения сил, и учитывая, что $\varphi_{II} = \varphi_3 = \varphi_{кр}$,



$$kMg\varphi_{кр} = \frac{Mv^2}{R} \quad (10).$$

Максимальная скорость равна

$$v_{\max} = \sqrt{k\varphi_{кр} Rg} \quad (11).$$

5. Рассмотрим движение в левом повороте. При наличии схождения передних колёс, углы увода левого и правого колёс отличаются от некоторого среднего значения φ_{II} на величину δ , т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{III} &= \varphi_{II} + \delta \\ \varphi_{III} &= \varphi_{II} - \delta \end{aligned} \quad (12).$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота» и условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$\begin{cases} kN_{III}(\varphi_{II} - \delta) + kN_{III}(\varphi_{II} + \delta) + k\varphi_3(N_{3л} + N_{3п}) = \frac{Mv^2}{R} \\ (kN_{III}(\varphi_{II} - \delta) + kN_{III}(\varphi_{II} + \delta)) \cdot a = k\varphi_3(N_{3л} + N_{3п}) \cdot b \end{cases} \quad (13).$$

Решение системы:

$$\varphi_3 = \frac{v^2}{gkR} \text{ и } \varphi_{II} = \frac{v^2}{gkR} - \delta \frac{v^2 hL}{Rdgb} \quad (14).$$

Угол поворота:

$$\theta = \xi - \varphi_{II} + \varphi_3 = \xi + \delta \frac{v^2 hL}{Rdgb} \quad (15).$$

Необходимо учесть, что $R = \frac{L}{\theta}$, тогда

$$\theta = \xi + \delta \frac{v^2 h}{dgb} \theta \quad (16).$$

Выражая θ , получим:

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \delta \frac{v^2 h}{dgb}} \quad (17).$$

Делаем вывод: при положительном δ $\theta > \xi$ – автомобиль обладает избыточной поворачиваемостью, при $\delta < 0$ – недостаточной.

6. При определённой скорости движения знаменатель в формуле (17) обращается в нуль. Это значит, что при малейшем движении руля, угол поворота становится очень большим и автомобиль разворачивается. Значение критической скорости:

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{dgb}{\delta \cdot h}} \quad (18).$$

7. По-прежнему рассматриваем левый поворот. Необходимо определить, какое колесо первым потеряет сцепления с дорогой. Предположим, что это будут задние колёса. Для того чтобы это произошло, необходимо, чтобы

$$v^2 = \varphi_{кр} gkR \quad (19).$$

В этом случае значение максимальной скорости совпадает со значением, полученным в пункте 4:

$$v_{\max} = \sqrt{k\varphi_{кр} Rg} \quad (20)$$

Однако необходимо проанализировать, действительно ли задние колёса сорвутся первыми. Единственным «конкурентом» является переднее правое колесо.

Подставим значение (19) в формулу (14) для φ_{II} .

$$\varphi_{II} = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} \quad (21).$$

Для переднего правого колеса:

$$\varphi_{III} = \varphi_{II} + \delta = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} + \delta = \varphi_{кр} + \delta \left(1 - \frac{\varphi_{кр} khL}{db}\right) \quad (22).$$

Из формулы (21) делаем вывод, что при

$$\varphi_{кр} khL < db \quad (23)$$

значение φ_{III} будет больше $\varphi_{кр}$, т.е. первым сорвется переднее правое колесо, после чего процесс станет необратимым. Для нахождения критической скорости, запишем условие достижения критического угла увода передним правым колесом.

$$\varphi_{кр} = \frac{v^2}{gkR} + \delta \left(1 - \frac{v^2 hL}{Rdgb}\right) \quad (24).$$

Выражая v , получим:

$$v'_{\max} = \sqrt{\frac{kRg(\varphi_{кр} - \delta)}{1 - \delta \frac{hLk}{db}}} \quad (25).$$

Заметим, что если $\varphi_{кр} khL < db$, то и $\delta \cdot khL < db$.

Таким образом, максимальная скорость определяется либо срывом задних колёс, либо срывом переднего правого колеса в зависимости от соотношения между величинами (23).

11 класс.

Задача 1. «Взрывная эмиссия»

1. Концентрация электронов.

Один моль платины имеет массу μ и занимает объем $V = \frac{\mu}{\rho}$, при этом в нем находится N_A атомов. Если от каждого атома в зону проводимости перешел один электрон, то в одном моле платины будет N_A электронов, а их концентрация будет равна

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{\mu} \quad (1)$$

$$n = 6,62 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} \quad (2)$$

При такой большой концентрации электроны не покидают металл, потому что на них действуют силы притяжения со стороны положительно заряженных ионов металла. Другими словами, энергия электронов в металле меньше, чем их энергия в вакууме.

Для того чтобы электрон покинул металл, надо сообщить ему дополнительную энергию, например, повысив температуру металла. Эмиссию электронов под действием электрического поля позволяет объяснить только квантовая механика.

2. Электрическое поле.

Точное нахождение электрического поля вблизи поверхности металла при известном потенциале – достаточно сложная задача, но приближенно можно показать связь напряженности и потенциала на примере металлической сферы. Если на сфере радиусом r находится заряд Q , то напряженность электрического поля у поверхности

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а потенциал

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Как видно,

$$E = \frac{\varphi}{r}. \quad (3)$$

Вблизи острия металлической иглолки данное равенство выполняется только приближенно, но можно использовать его для оценки напряженности электрического поля.

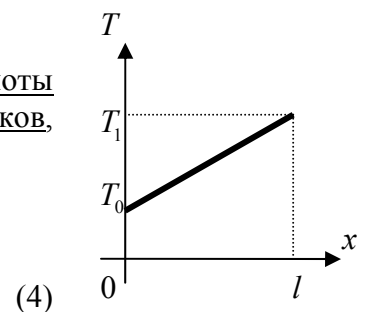
3. Теплопроводность.

3.1. Так как стержень однородный и нет источников теплоты внутри стержня, то поток теплоты в любом сечении его одинаков, т.е.

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx} = const$$

$$\frac{dT}{dx} = C$$

$$\int_{T_0}^T dT = C \int_0^x dx$$



$$T(x) = T_0 + Cx,$$

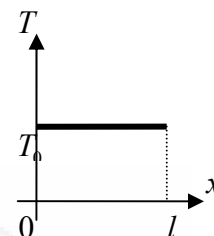
причем на торце $x = l$ $T(l) = T_1$, поэтому $C = \frac{T_1 - T_0}{l}$

$$T(x) = T_0 + \frac{x}{l}(T_1 - T_0) \quad (5)$$

График этой зависимости – прямая линия.

3.2. Если стержень теплоизолирован и на одном из концов поддерживается постоянная температура T_0 , то никакого потока тепла в этом стержне нет и температура по всей длине стержня постоянна и равна

$$T(x) = T_0. \quad (6)$$



3.3. Поскольку стержень теплоизолирован, то в установившемся режиме (то есть, когда температура перестанет изменяться) для теплового баланса необходимо, чтобы вся теплота, выделяющаяся правее некоторой точки x стержня (то есть, с части стержня длиной $l - x$), отводилась путем теплопередачи.

Уравнение теплового баланса

$$P_{\text{менл}} + qS = 0 \quad (7)$$

$$(l - x)Sw - \kappa \frac{dT}{dx} S = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = (l - x) \frac{w}{\kappa}$$

$$\int_{T_0}^T dT = \int_0^x \frac{w}{\kappa} (l - x) dx$$

$$T(x) = T_0 + \frac{w}{\kappa} lx - \frac{w}{\kappa} \frac{x^2}{2} = T_0 + \frac{w}{\kappa} x(l - \frac{x}{2}) \quad (8)$$

Температура правого торца стержня равна

$$T_l = T_0 + \frac{wl^2}{2\kappa} \quad (9)$$

3.4. Если по стержню течет ток плотностью j , то по закону Джоуля-Ленца в дифференциальной форме в единице объема в единицу времени выделяется теплота

$$w = \gamma j^2. \quad (10)$$

Соответственно, температура правого торца стержня будет равна

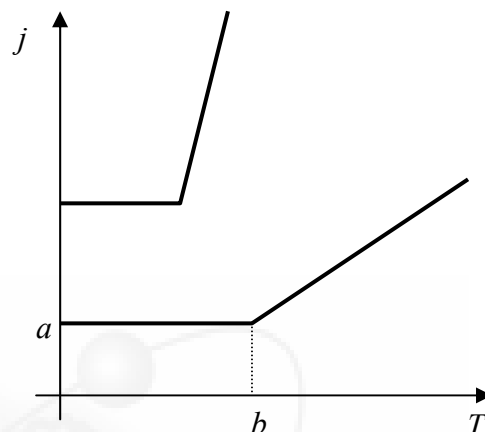
$$T_l = T_0 + \frac{\gamma j^2 l^2}{2\kappa} \quad (11)$$

4. Эмиссия электронов.

4.1. Зависимость $j(T) = \begin{cases} a, & T < b \\ a + k(T - b), & T \geq b \end{cases}$ -

кусочно-линейная, причем коэффициент a показывает, насколько график приподнят над осью абсцисс, коэффициент b показывает температуру излома, а коэффициент k - угловой коэффициент для наклонного участка графика. С ростом напряженности электрического поля вблизи поверхности металла коэффициент a увеличивается, коэффициент b уменьшается, а коэффициент k увеличивается.

График зависимости $j(T)$ при двух значениях напряженности показан на рисунке.



4.2. Если потенциал катода равен $\varphi = -50 \cdot 10^3 \text{ В}$, то напряженность поля вблизи острия иглолки равна $E = 5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$. Значения коэффициентов равны $a = 4,06 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$, $b = 1900 \text{ К}$, $k = 3,49 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2 \text{ К}$.

Тепло, выделяющееся в иглолке при протекании по ней тока, вызывает нагрев. В установившемся режиме вся выделяющаяся теплота отводится за счет теплопередачи. При протекании тока плотностью j температура острия будет равна $T = T_0 + \frac{\gamma j^2 l^2}{2\kappa}$ (см. п. 3.4).

Можем выразить плотность тока в зависимости от температуры острия

$$j = \sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2} (T - T_0)}$$

Смысл этого соотношения: чтобы температура острия была равна T , по иглолке должен течь ток плотностью j .

Поскольку эмиссия происходит с поверхности полусферы площадью $2\pi r^2$, а поперечное сечение иглолки равно πr^2 , при этом сила тока одинакова что внутри иглолки, что с поверхности острия, то плотность тока внутри иглолки и на поверхности острия отличаются в два раза:

$$\begin{aligned} \pi r^2 j_{\text{внутри}} &= 2\pi r^2 j_{\text{поверхн}} \\ \boxed{j_{\text{внутри}} &= 2j_{\text{поверхн}}} \end{aligned} \quad (12)$$

Соответственно, для того, чтобы температура острия была равна T , с поверхности должен стекать такой ток, что

$$2j_{\text{поверхн}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2} (T - T_0)}$$

$$j_{\text{поверхн}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2\gamma l^2} (T - T_0)}$$

Для удобства дальнейшей работы обозначим коэффициент $\chi = \sqrt{\frac{\kappa}{2\gamma l^2}} = 3,61 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 \text{ К}^{1/2}$

Плотность тока эмиссии j_1 определяется температурой острия T

$$j_1(T) = \begin{cases} a, & T < b \\ a + k(T - b), & T \geq b \end{cases}$$

А плотность тока j_2 , который должен стекать с острия, чтобы на нем была температура T , определяемая теплопередачей

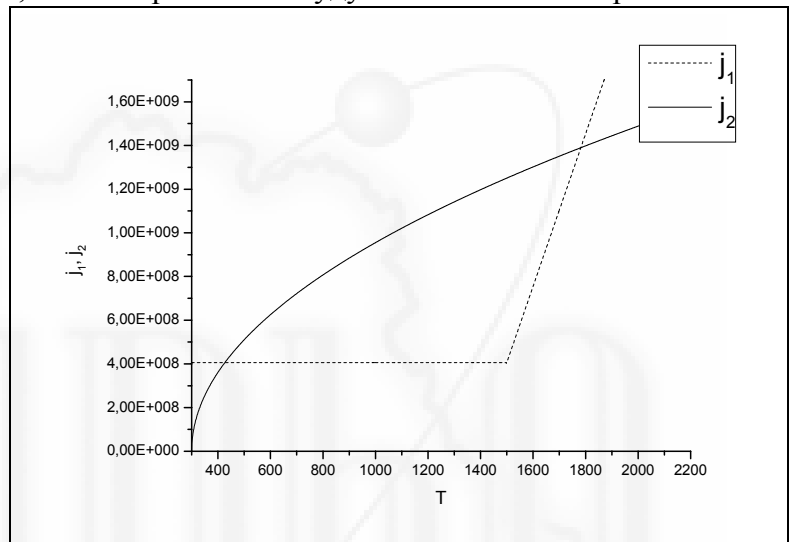
$$j_2(T) = \chi \sqrt{T - T_0}$$

Очевидно, что это одна и та же плотность тока, поэтому температура стационарного состояния определяется уравнением

$$j_1(T) = j_2(T) \quad (13)$$

Построим обе функции на графике, точки пересечения будут соответствовать решениям.

Решения два. Рассмотрим первое, которое соответствует меньшей температуре. Если вдруг случайно температура увеличится, то плотность тока эмиссии не изменится, а вот потери теплоты возрастут (для поддержания температуры требуется большая плотность тока), и острие иголки начнет охлаждаться. Если вдруг температура острия уменьшится, то потери теплоты тоже уменьшатся, но ток эмиссии будет тем же, поэтому иголка



начнет нагреваться. Это решение устойчиво, потому что отклонения температуры от стационарной приводят к процессам, возвращающим иголку к равновесной температуре.

Решение же, соответствующее большей температуре, неустойчиво. Стоит только температуре случайно увеличиться, как ток эмиссии станет больше, а увеличение потерь теплоты не сможет компенсировать увеличение выделяющегося джоулева тепла. Это приведет ещё большему разогреву иголочки – температура уходит от равновесного значения.

На практике, если не создать специальных условий, при небольших плотностях тока реализуется только устойчивое решение, ведь нагрев иголки от комнатной температуры производится при помощи протекающего тока.

Найдем это значение температуры T_l . Условие (13) превращается в

$$a = \chi \sqrt{T_l - T_0}$$

$$T_l = T_0 + \frac{a^2}{\chi^2} \quad (14)$$

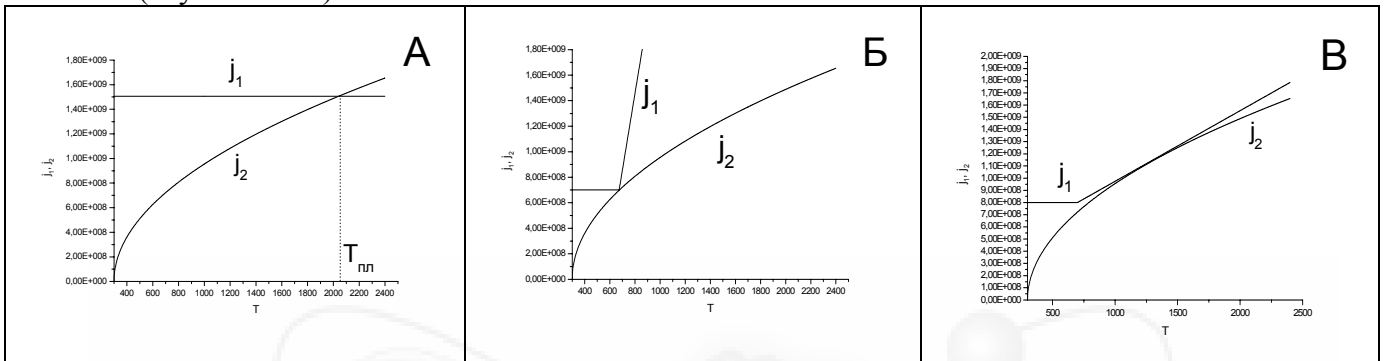
$$T_l = 301,3K \quad (15)$$

Примечание.

Не обязательно строить именно графики $j_1(T)$ и $j_2(T)$, можно построить их квадраты, но рассуждения при этом будут аналогичными, и численные ответы получатся такими же.

4.3. Значения коэффициентов a, b, k зависят от напряженности электрического поля, соответственно, от потенциала катода. При некотором значении потенциала возникнет критическая ситуация, когда потери тепла на теплопроводность не смогут остановить разогрев, температура достигнет температуры плавления и наступит разрушение острия

иголки. Это может наступить, если устойчивое решение уравнения (13) станет равным температуре плавления (случай А) или если $j_1(T) \geq j_2(T)$ для любой температуры T , что соответствует касанию графиков в одной точке, что может произойти двумя способами (случай Б и В).



Выясним, какой случай реализуется в нашей задаче. Реализоваться может только один из трех возможных случаев, поскольку функции $a(E), b(E), k(E)$ монотонные, причем $a(E), k(E)$ экспоненциально быстро возрастают.

График $j_1(T)$ - это «уголок». Выясним, какие положения на графике может занимать вершина угла. При напряженности электрического поля E положение вершины угла на графике – это точка $(b(E), a(E))$.

Система

$$a = a_1 \exp(a_2 E)$$

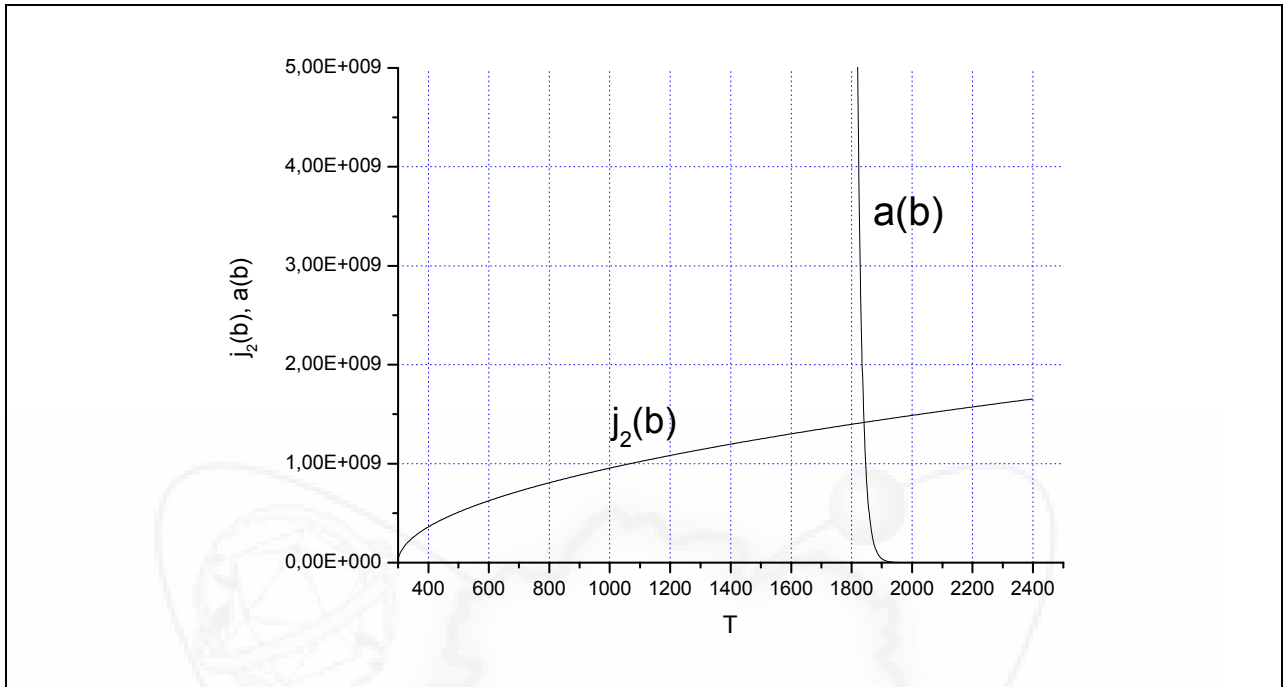
$$b = b_1 - b_2 E$$

задает положение вершины «уголка» в параметрическом виде. Можно построить по точкам график возможных положений вершины угла, задавая разные значения напряженности электрического поля. Можно заметить, что коэффициент b , у которого размерность температуры, линейно связана с E , поэтому

$$E = \frac{b_1 - b}{b_2}$$

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right)$$

Построим на одном графике $j_2(b)$ и $a(b)$.



По графику сразу видно, что случай в этой задаче не реализуется, поскольку вершина уголка пересекает график $j_2(b)$ при температуре, меньшей температуры плавления платины $T_{пл} = 2045K$.

Скорее всего, мы имеем дело со случаем Б, но это надо доказать. Для того чтобы действительно реализовался случай А, необходимо, чтобы вершина уголка совпадала с одной из точек $j_2(T)$, то есть

$$b = T^*$$

$$a = \chi \sqrt{T^* - T_0}$$

и график $j_1(T)$ шел круче, чем $j_2(T)$, то есть

$$\boxed{k > \left. \frac{dj_2}{dT} \right|_{T=T^*} = \frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}}} \quad (16)$$

Температуру, соответствующую решению T^* , можно найти графически, если аккуратно построить график, а можно найти аналитически, ведь

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right).$$

Тогда

$$\chi \sqrt{T^* - T_0} = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right)$$

$$T^* = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2} \exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right).$$

Это уравнение аналитически не решается, но можно воспользоваться методом последовательных приближений. При этом необходимо соблюдать осторожность, поскольку использование метода по формуле $T^{*(k+1)} = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2} \exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^{*(k)})\right)$ не дает решение, потому что метод расходится. Необходимо сделать небольшие математические преобразования и применять метод по формуле $T^{*(k+1)} = \left(b_1 - \frac{b_2}{2a_2} \ln\left(\frac{\chi^2}{a_1^2}(T^{*(k)} - T_0)\right)\right)$.

Метод очень быстро сходится и даже если взять начальное приближение $T^{*(0)} = 1800K$, уже после первой итерации получается правильный ответ

$$\boxed{T^* = 1840,8K} \quad (17)$$

Эта температура соответствует напряженности электрического поля

$$E^* = \frac{b_1 - T^*}{b_2} = 8,5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$$

при этом величина критического потенциала равна (с точностью до знака)

$$\boxed{\varphi_{кр} = 85кВ} \quad (18)$$

Но ещё необходимо проверить условие (). При напряженности поля $E^* = 8,5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$, коэффициент $k = 9,33 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2\text{К}$, а $\frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}} = 4,60 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2\text{К}$.

Поскольку

$$\boxed{k > \left. \frac{dj_2}{dT} \right|_{T=T^*} = \frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}}}, \quad (19)$$

то действительно реализуется случай Б.

4.4. При подаче на катод потенциала $\varphi = 130кВ$ напряженность электрического поля вблизи острия принимает значение $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ В/м}$. Значения коэффициентов при данной напряженности равны $a = 1,31 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2$, $b = 1721K$, $k = 6,39 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2\text{К}$.

Плотность тока сразу после включения, пока иглолка не успела разогреться до температуры b , равняется

$$\boxed{j_1 = a = 1,31 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2}. \quad (20)$$

Но даже при температуре плавления платины плотность тока

$$\boxed{j_2 = 1,51 \cdot 10^9 \text{ А/м}^2}, \quad (21)$$

что на два порядка меньше начальной плотности тока j_1 . Это означает, что потерями теплоты на теплопроводность можно пренебречь и считать иглолку полностью теплоизолированной.

Выделяющаяся джоулева теплота идет только на нагревание иглолки. В таком случае уравнение теплового баланса

$$\begin{aligned} cm\Delta T &= P_{дж} \Delta t \\ c\rho V\Delta T &= \gamma j^2 V \Delta t \end{aligned}$$

В дифференциальном виде

$$\boxed{dt = \frac{c\rho}{\gamma j^2(T)} dT} \quad (22)$$

$$t = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^{T_m} \frac{dT}{j^2(T)}$$

Поскольку $j(T)$ - кусочно-линейная функция, то интеграл надо считать отдельно до точки b и после неё.

$$t_1 = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^b \frac{dT}{a^2} = \frac{c\rho}{\gamma a^2} (b - T_0)$$

$$t_2 = \frac{c\rho}{\gamma} \int_b^{T_{nz}} \frac{dT}{[a+k(T-b)]^2} = \frac{c\rho}{\gamma k} \int_b^{T_{nz}} \frac{d[a+k(T-b)]}{[a+k(T-b)]^2} = -\frac{c\rho}{\gamma k} \frac{1}{[a+k(T-b)]} \Big|_b^{T_{nz}} = \frac{c\rho}{\gamma k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{[a+k(T_{nz}-b)]} \right)$$

Время до взрыва равно

$$t = \frac{c\rho}{\gamma a^2} (b - T_0) + \frac{c\rho}{\gamma k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{[a+k(T_{nz}-b)]} \right) \quad (23)$$

$$t = 2,6 \cdot 10^{-6} c = 2,6 \text{ нс} \quad (24)$$

В течение времени до взрыва с острия иглопочки идет достаточно большой ток. Явление взрывной эмиссии используют в генераторах очень мощных и очень коротких импульсов тока.



Задача 2 «Динамик»

1. Сила Ампера.

Очевидно, что если катушка с током находится в однородном вертикальном магнитном поле, то равнодействующая сил Ампера, действующих на разные части катушки, равна нулю.

Для возникновения ненулевой вертикальной составляющей силы Ампера необходимо, чтобы существовала радиальная составляющая магнитного поля – магнитное поле должно быть неоднородным. (1)

Определим радиальную составляющую магнитного поля. Выделим в пространстве воображаемый цилиндр, совпадающий с катушкой, высотой Δz и радиусом r . Полный магнитный поток через замкнутую поверхность цилиндра равен нулю

$$\Phi_B = 0.$$

$$B_z(z + \Delta z)\pi r^2 + B_r 2\pi r \Delta z - B_z(z)\pi r^2 = 0$$

$$\text{Отсюда } B_r = \frac{B_z(z) - B_z(z + \Delta z)}{2\Delta z} r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}.$$

$$B_r = \frac{\alpha B_0 r}{2}$$

Тогда вертикальная составляющая силы Ампера, действующая на катушку, равна

$$F_A = 2\pi r N I B_r = 2\pi r N I \frac{\alpha B_0 r}{2} = \alpha B_0 \pi r^2 N I \quad (2)$$

Поскольку магнитное поле симметрично относительно оси Oz , равнодействующая горизонтальных составляющих силы равна нулю.

2. Амплитуда колебаний.

Переменное напряжение, поданное на клеммы катушки, вызовет переменный ток в катушке, на нее начнет действовать сила Ампера, и катушка придет в движение. Рассмотрим силы, действующие на катушку.

1) Если собственная частота колебаний системы равна ω_0 , то при отклонении катушки из положения равновесия на небольшое расстояние z , на нее будет действовать упругая возвращающая сила

$$F_{\text{упр}} = -kz = -m\omega_0^2 z.$$

Собственная частота колебаний для катушки равна $\omega_0 = 2\pi f_0 = 188c^{-1}$.

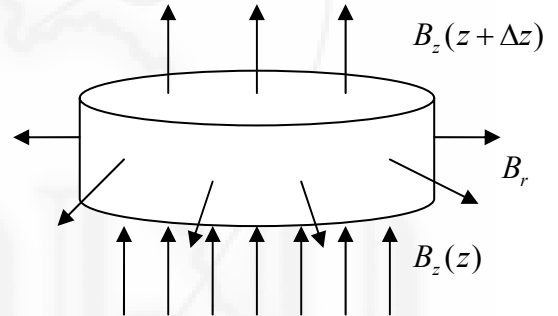
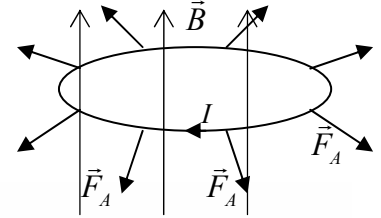
2) Как было сказано в условии, при движении мембраны вместе с катушкой, создаются звуковые волны, при этом на мембрану действует сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = -\beta v.$$

В данном случае коэффициент $\beta = \frac{2\gamma P_0 S}{c} = 26,4 \text{ кг/с}.$

3) И ещё на катушку будет действовать сила Ампера, направление которой зависит от способа намотки катушки и направления тока в ней. Для определенности будем считать, что при приложении положительного постоянного напряжения ток течет так, что сила Ампера направлена вверх.

$$F_A = \alpha B_0 \pi r^2 N I.$$



Для удобства обозначим постоянный множитель перед силой тока $g = \alpha B_0 \pi r^2 N$. В данном случае $g = 3,14 \text{ H/A}$.

По второму закону Ньютона

$$ma = F_{\text{уп}} + F_{\text{comp}} + F_A \quad (4)$$

$$ma = -m\omega_0^2 z - \beta v + gI$$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI \quad (5)$$

(точками сверху обозначены соответствующие производные по времени).

Рассмотрим, как связаны между собой сила тока и прикладываемое к катушке напряжение.

1) Внешняя ЭДС, прикладываемая к катушке равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

2) Переменное напряжение вызывает переменный ток, и в катушке, обладающей индуктивностью L , возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{\text{cu}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

3) При движении катушки в магнитном поле, магнитный поток через нее изменяется, что приводит к возникновению ЭДС индукции

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} (N\pi r^2 B_0 (1 - \alpha z)) = \alpha B_0 \pi r^2 N \frac{dz}{dt} = gz$$

По закону Ома для полной цепи

$$RI = \varepsilon + \varepsilon_{\text{cu}} + \varepsilon_{\text{инд}} \quad (6)$$

$$RI = -L \frac{dI}{dt} + gz + \varepsilon$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + gz \quad (7)$$

Итого, получилась система из двух связанных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + gz$$

Нас интересует решение, которое установится, в конце концов, при периодической внешней ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Ясно, что когда собственные колебания затухнут, сила тока и координата будут изменяться по гармоническому закону с такой же частотой, но другой начальной фазой.

В принципе, можно точно решить это уравнение, подставив в систему дифференциальных уравнений

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi),$$

$$z = A \cos(\omega t + \psi),$$

потом, продифференцировав, разложив тригонометрические функции и приравняв коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, но это даст систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой весьма получится достаточно громоздким и отнимет много времени и сил. Но нетрудно заметить, что в если ток изменяется по закону $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, то амплитуда слагаемого RI будет

равна RI_0 , а амплитуда слагаемого $L \frac{dI}{dt}$ будет равна ωLI_0 . Даже на предельной для человеческого уха частоте $f = 20 \text{ кГц}$ величина $\omega L = 0.12 \text{ Ом}$, тогда как

$R = 4,00 \text{ Ом} \square 0,12 \text{ Ом}$. Поэтому слагаемым $L \frac{dI}{dt}$ можно пренебречь, и система уравнений превращается в

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

Подставив ток в первое уравнение, получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами – уравнение вынужденных колебаний с затуханием:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = g \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

$$m\ddot{z} + \left(\beta - \frac{g^2}{R} \right) \dot{z} + m\omega_0^2 z = \frac{g}{R} \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{m} \left(\beta - \frac{g^2}{R} \right) \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{g\varepsilon_0}{mR} \cos \omega t$$

Для удобства обозначим $\chi = \frac{1}{m} \left(\beta - \frac{g^2}{R} \right)$, $D = \frac{g\varepsilon_0}{mR}$.

Значение коэффициента $\chi = 479 \text{ с}^{-1}$. Значение коэффициента $D = 15,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ при амплитуде внешнего напряжения $\varepsilon_0 = 1 \text{ В}$.

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{z} + \chi\dot{z} + \omega_0^2 z = D \cos \omega t \quad (8)$$

Нас интересует амплитуда напряжения. Решить это дифференциальное уравнение можно разными способами: подстановкой $z = A \cos(\omega t + \psi)$, методом векторных диаграмм или методом комплексных амплитуд – это дело вкуса. В результате получается

$$A(\omega) = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2}}. \quad (9)$$

Если подставить выражения для всех коэффициентов, то получится весьма громоздкое выражение

$$A(\omega) = \frac{\frac{\alpha B_0 \pi r^2 N \varepsilon_0}{mR}}{\left[(\omega^2 - (2\pi f_0)^2)^2 + \left(\frac{1}{m} \left(\frac{2\gamma P_0 S}{c} - \frac{(\alpha B_0 \pi r^2 N)^2}{R} \right) \omega \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (10)$$

поэтому допустимо оставить выражение для амплитуды в более простом виде (9), предварительно оценив все коэффициенты.

При вынужденных колебаниях с затуханием на некоторой частоте вблизи собственной наблюдается резонанс (максимум амплитуды), который наступает при минимуме знаменателя.

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2 = \min$$

Исследуем выражение на экстремум стандартным способом.

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2] = 0$$

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega = 0$$

$$(\omega^2 - (\omega_0^2 - \frac{\chi^2}{2}))\omega = 0$$

Вторая производная исследуемой функции равна

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega] = 3\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2)$$

У этого уравнения 3 корня $\omega_1 = 0$ и $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$, правда, отрицательный корень физического смысла в себе не несет.

При небольшом затухании ($\omega_0^2 > \chi^2/2$) в точке $\omega_1 = 0$ локальный максимум (соответственно, минимум амплитуды), ведь вторая производная меньше нуля, а в точке $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$ - локальный минимум (соответственно максимум амплитуды).

В случае же сильного затухания ($\omega_0^2 < \chi^2/2$) ситуация коренным образом меняется, поскольку уравнение $(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$ имеет только один действительный корень $\omega_1 = 0$, причем вторая производная в этой точке больше нуля, что означает минимум выражения и максимум амплитуды. Таким образом, при сильном затухании резонанса не наблюдается, и максимальная амплитуда соответствует нулевой частоте.

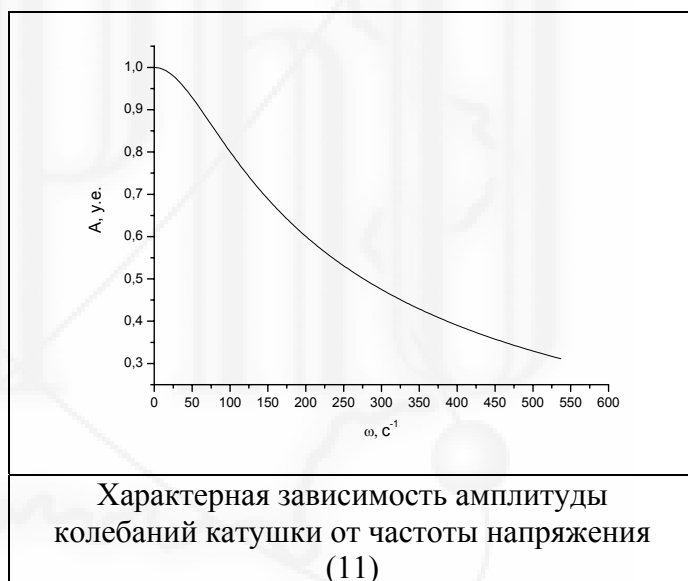
В нашем случае $\omega_0 = 188c^{-1}$, а $\chi = 479c^{-1}$, соответственно мы имеем дело со случаем сильного затухания

($\omega_0^2 < \chi^2/2$), поэтому максимум амплитуды приходится на нулевую частоту и примерный график зависимости должен выглядеть так, как изображено на рисунке.

На частоте $f_0 = 30Гц$ ($\omega_0 = 188c^{-1}$) амплитуда равна

$$A = D/(\chi\omega_0)$$

$$A = 1,74 \cdot 10^{-4} м = 0,174 мм \quad (12)$$



3. Звуковая мощность.

Как было сказано в условии, в связи с генерацией звуковых волн на мембрану действует сила сопротивления $F_{сопр} = -\beta v$. Это значит, что мощность $P_{зв}^{мгнов} = \beta v^2 = \beta z^2$ идет на создание звука. Таким образом, мгновенная звуковая мощность

$$P_{зв}^{мгнов} = \beta v^2 = \beta[-\omega A \sin(\omega t + \psi)]^2 = \frac{\beta \omega^2 D^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \sin^2(\omega t + \psi) \quad (13)$$

Это мгновенная мощность, но с практической точки зрения нас интересует средняя звуковая мощность, поэтому надо усреднить мгновенную мощность по периоду. Как известно, среднее значение $\sin^2(\omega t + \psi)$ по периоду равно $1/2$. Итого,

$$P_{зв}(\omega) = \frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \quad (14)$$

Иследуем $P_{зв}(\omega)$ на максимум.

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2} \right] = \frac{2\omega((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2) - \omega^2(2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2]^2} = 0$$

$$\omega[\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \chi^2\omega^2 - 2\omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2 - \chi^2\omega^2] = 0$$

$$\omega(\omega_0^4 - \omega^4) = 0$$

$$\omega(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega_0^2 + \omega^2) = 0$$

Физический смысл имеют решения $\omega_1 = 0$ (соответствует минимуму мощности) и $\omega = \omega_0$ (соответствует максимуму мощности). Итак, звуковая мощность максимальна на частоте

$$\omega = \omega_0 = 188\text{с}^{-1}, \quad (15)$$

при этом мощность равна

$$P_{зв\max} = \frac{\beta D^2}{2\chi^2} = 0.0142\text{Вт}. \quad (16)$$

Потребляемая электрическая мощность $P_{эл} = \varepsilon(t)I(t) \cos \phi$, где ϕ - сдвиг фаз между током и напряжением. Сила тока $I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$.

Оценим величину $g\dot{z} = -gA\omega \sin(\omega t + \psi)$. Пренебечь ей можно, если амплитуда $gA\omega$ будет много меньше ε_0 . Как видно по графику, с ростом частоты ω амплитуда $A(\omega)$ убывает, причем при больших частотах обратно пропорционально квадрату частоты. При малых частотах ωA мало, при больших тоже мало, а в средних частотах имеет максимум. Выражение

$$g\omega A = \frac{Dg\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2]^{1/2}} \text{ ведет себя}$$

так, как изображено на рисунке.

Для оценки можно воспользоваться рассчитанным в предыдущем пункте значением A на частоте $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$.

$$g\omega_0 A(\omega_0) = 0.103\text{В}$$

Поскольку в условии требуется не найти, а оценить величину КПД, можем пренебечь величиной $g\omega_0 A(\omega_0) = 0.103\text{В}$ по сравнению с $\varepsilon_0 = 1\text{В}$, что приведет к тому, что значение КПД получится чуть завышенным.

Тогда потребляемая мгновенная мощность $P_{эл\text{мгнов}} = \frac{\varepsilon_0^2 \cos^2(\omega t)}{R}$, а среднее значение потребляемой мощности

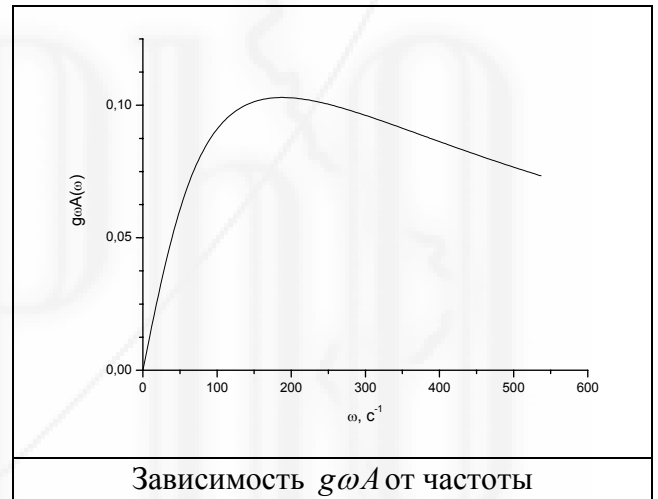
$$P_{эл} = \frac{\varepsilon_0^2}{2R}. \quad (17)$$

Потребляемая электрическая мощность равна $P_{эл} = 0,125\text{Вт}$.

Максимальный КПД равен

$$\eta_{\max} = \frac{P_{зв\max}}{P_{эл}} = 0,113 \quad (18)$$

Для нахождения граничных частот рабочего диапазона надо решить уравнение



Зависимость $g\omega A$ от частоты

$$P_{зв}(\omega_{н,г}) = \frac{P_{зв\max}}{2} \quad (19)$$

$$\frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2} = \frac{1}{2} \frac{\beta D^2}{2\chi^2}$$

$$\omega^4 - (2\omega_0^2 + \chi^2)\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\omega_{г,н} = \sqrt{(\omega_0^2 + \chi^2/2) \pm \chi \sqrt{\omega_0^2 + \chi^2/4}} \quad (20)$$

Верхняя граничная частота равна

$$\omega_g = 544 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_g = 86,6 \text{ Гц}. \quad (21a)$$

Нижняя граничная частота равна

$$\omega_n = 65,0 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_n = 10,3 \text{ Гц}. \quad (21б)$$

График зависимости звуковой мощности от частоты переменного напряжения изображен на рисунке.

Как видно, исследованный нами динамик хорошо подходит для воспроизведения низких частот (басов).

