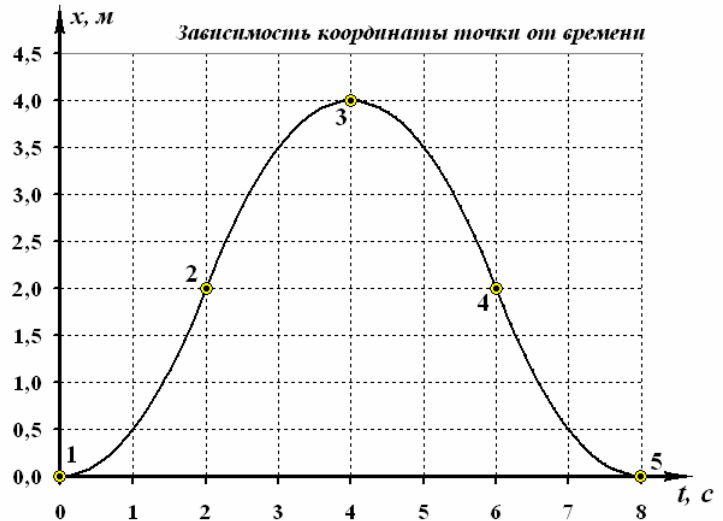


9 класс.

Задание 1. «Просто кинематика»

1.1.1 На временных интервалах $[0, 2]$; $[2, 6]$; $[6, 8]$ с движение является равноускоренным, поэтому графики зависимости координаты от времени на этих интервалах будут являться отрезками парабол. Изменение координаты можно подсчитать как площади под участками графика зависимости $V(t)$. В итоге должен получиться график, показанный на рисунке.



Критериями правильности построения графика являются:

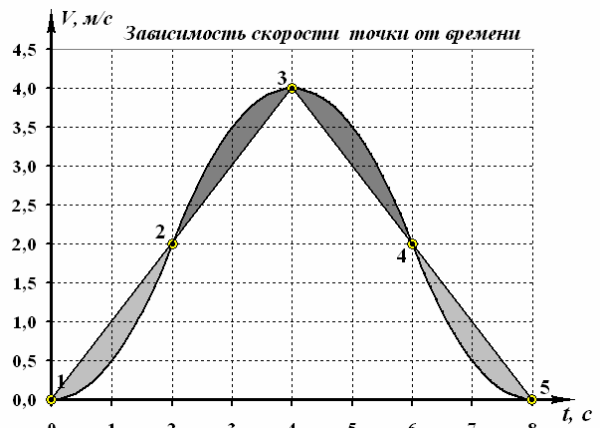
- правильность координат точек 1, 2, 3, 4, 5;
- точки 1, 3, 5 являются вершинами парабол; т.е. в этих точках касательные должны быть горизонтальны;
- в точках 2, 3 не должно быть изломов, т.е. участки парабол плавно переходят друг в друга.

1.1.2 По графику видно, что перемещение точки равно $\Delta x = 0$. Пройденный путь равен $S = 8,0$ м.

1.2.1 График зависимости скорости от времени совпадает с графиком зависимости координаты от времени, построенный в предыдущем пункте задачи.

В этом случае площадь под графиком численно равна изменению координаты точки. Очевидно, что площади заштрихованных участков (между отрезками парабол и прямыми) равны. Поэтому площадь под графиком зависимости $V(t)$ равна площади треугольника 1-3-5-1, которая подсчитывается элементарно. Итого, в данном случае путь и перемещение равны

$$S = \Delta x = 16 \text{ м.}$$



1.3.1 Для выполнения данного пункта задачи следует провести преобразования

$$V = 60 \frac{\text{миль}}{\text{час}} = 60 \frac{1609 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 27 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Обращаем внимание на правильность округления (в соответствии с точностью исходных данных) – до **двух** значащих цифр!

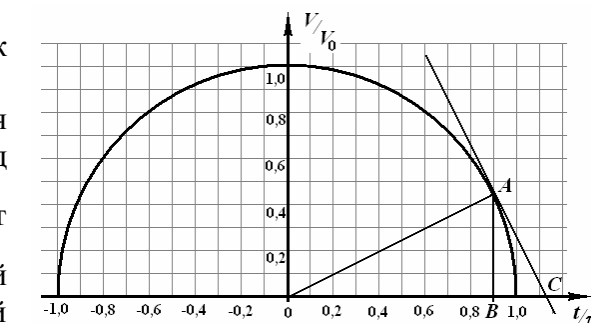
1.3.2 В этом пункте цепочка «пересчета» имеет вид

$$\tilde{V} = \frac{V}{c} = \frac{2600 \frac{\text{км}}{\text{час}}}{330 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{2600 \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}}}{330 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 2,19 \text{ Max}$$

В данном случае результат должен быть округлен до **трех** значащих цифр.

1.4.1 В требуемых координатах график имеет вид полуокружности.

1.4.2 В данных единицах измерения пройденный путь равен площади под графиком, т.е. $\frac{\pi}{2}$. Далее следует перейти в систему СИ. Единицей измерения длины в используемой «безразмерной» системе единиц является $V_0 \tau$, поэтому пройденный путь (и перемещение) равен



$$S = \frac{\pi}{2} V_0 \tau .$$

1.4.3 На графике зависимости скорости от времени ускорение численно равно коэффициенту наклона касательной. В данном случае касательная перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания. Из рисунка следует, что коэффициент наклона касательной AC равен тангенсу угла OAC , взятому с противоположным знаком, то есть в используемых единицах

$$\tilde{a} = -\frac{|OB|}{|AB|} = -\frac{\tilde{t}}{\tilde{V}(\tilde{t})} = -\frac{\tilde{t}}{\sqrt{1-\tilde{t}^2}},$$

здесь $\tilde{V} = \frac{V}{V_0}$, $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$. Для перехода в систему единиц СИ необходимо учесть, что

единицей измерения ускорения является величина $\frac{V_0}{\tau}$. Окончательно получаем

$$a = \frac{V_0}{\tau} \tilde{a} = -\frac{V_0}{\tau} \frac{\tilde{t}}{\sqrt{1-\tilde{t}^2}} = -\frac{V_0}{\tau} \frac{\frac{t}{\tau}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{\tau^2}}} .$$

Задание 2 «Кастрюля»

1. В каждом случае вода нагревается на $\Delta T = 5^\circ C$. Температурный интервал достаточно маленький. Поэтому можно считать, что мощность тепловых потерь в окружающую среду остается практически неизменной в этом интервале. Для большей точности в формулу теплопотерь

$$P_{\uparrow} = \alpha(T - T_0) \quad (1)$$

будем подставлять среднее значение температуры. В нашем случае:

$$\langle T_1 \rangle = 2,5^\circ C \quad \langle T_2 \rangle = 42,5^\circ C \quad \langle T_3 \rangle = 82,5^\circ C \quad (2).$$

За некоторый промежуток времени Δt вода получает от плиты количество теплоты равное $P\Delta t$ Дж и отдает в окружающую среду количество теплоты равное $P_{\uparrow}\Delta t$ Дж.

Уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

$$cm\Delta T = (P - P_{\uparrow})\Delta t \quad (3).$$

Подставив выражение для мощности тепловых потерь, запишем уравнение (3) в виде:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = P - \alpha(\langle T \rangle - T_0) \quad (4).$$

Преобразуем уравнение (4) к виду:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = (P + \alpha T_0) - \alpha \langle T \rangle = \beta - \alpha \langle T \rangle \quad (5),$$

$$\text{где } \beta = P + \alpha T_0 \quad (6),$$

1.1 Используя данные задачи, можно вычислить значение правой части выражения (5) для каждого случая, т.е. для каждой средней

температуры (2) найти значение $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

Получим:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle T_1 \rangle = 2,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} &= 1235 \\ 2. \quad \langle T_2 \rangle = 42,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_2} &= 708 \\ 3. \quad \langle T_3 \rangle = 82,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3} &= 188 \end{aligned} \quad (7)$$

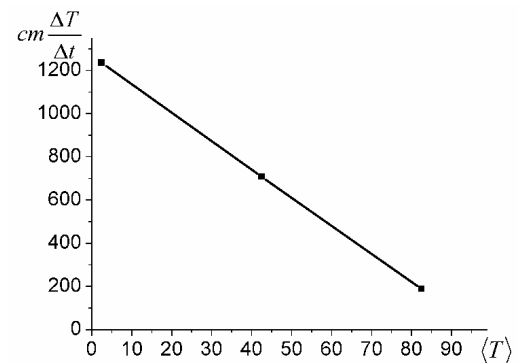


Рис.1

Если мощность теплопотерь действительно

пропорциональна разности температур, то все три точки на графике зависимости $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ будут находиться на одной прямой. Нетрудно убедиться, что это действительно так (рис. 1).

1.2 Определим постоянные α и β аналитически:

$$\alpha = \frac{cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13 \frac{Bm}{^\circ C} \quad (8);$$

$$\beta = 1270 Bm \quad (9);$$

1.3 При нагревании от $20^\circ C$ до $25^\circ C$ $\langle T \rangle = 22,5^\circ C$. Подставим это значение, а также значения постоянных α и β в уравнение (5). Получим:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t_x} = \beta - \alpha \langle T \rangle = 978 \quad (10).$$

Откуда:

$$\Delta t_x = \frac{cm \Delta T}{978} = 64c \quad (11).$$

1.4 Температура воды перестает изменяться, когда мощность теплопотерь становится равной мощности плиты. При этом правая часть выражения (5) обращается в ноль. Таким образом, максимальная температура равна:

$$T_{\max} = \frac{\beta}{\alpha} = 98^\circ C \quad (12)$$

2.1 При выключенной плите уравнение теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha (\langle T \rangle - T_0) = -\alpha \langle T \rangle + \alpha T_0 \quad (13)$$

Таким образом, зависимость $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ и в

случае остывания должна быть линейной.

Убедимся в этом:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle T_1 \rangle = 92,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} &= -940 \\ 2. \quad \langle T_2 \rangle = 62,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_2} &= -553 \\ 3. \quad \langle T_3 \rangle = 32,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3} &= -160 \end{aligned} \quad (14).$$

Зависимость действительно линейная (рис. 2).

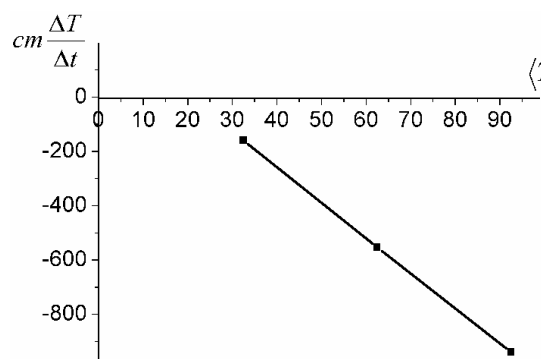


Рис.2

2.2 Можно убедиться, что постоянная α и в этом случае равна:

$$\alpha = -\frac{cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13 \quad (15).$$

А постоянная αT_0 :

$$\alpha T_0 = 263 Wm \quad (16).$$

Отсюда определяем значение комнатной температуры:

$$T_0 = 20^\circ C \quad (17).$$

2.3 При остывании от $50^\circ C$ до $45^\circ C$, средняя температура $\langle T \rangle = 47,5^\circ C$ Подставим известные величины в уравнение (13) и получим время остывания:

$$\Delta t_x = \frac{cm \Delta T}{-\alpha \langle T \rangle + \alpha T_0} = 176c \quad (18).$$

2.4 Мощность входила в выражение для коэффициента β в первой части задачи (выражение (6)). Зная комнатную температуру, можно вычислить мощность электроплиты:

$$P = \beta - \alpha T_0 = 1,0 \cdot 10^3 Wm \quad (19).$$

Задание 3. «Чем длина отличается от ширины?»

3.1 Используя известные формулы для сопротивления проводника и параллельного соединения проводников, найдем требуемое сопротивление

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\pi r^2}{\rho_1 L} + \frac{2\pi rh}{\rho_2 L} = \frac{\pi r}{\rho_1 \rho_2 L} (\rho_2 r + 2\rho_1 h) \Rightarrow \quad (1)$$

$$R = \frac{\rho_1 \rho_2 L}{\pi r (\rho_2 r + 2\rho_1 h)} = \frac{\rho_1 L}{\pi r^2 \left(1 + 2 \frac{\rho_1 h}{\rho_2 r}\right)}$$

Ответ может быть представлен и в других эквивалентных формах.

3.2 Используя стандартные формулы, находим

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}; \quad U_1 = IR_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

3.3 При подключении дополнительного резистора для расчета силы тока и напряжения можно воспользоваться полученными формулами (2), в которых вместо величины R_1 следует подставить сопротивление двух параллельных резисторов

$$R'_1 = \frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0}. \quad (3)$$

В этом случае напряжение окажется равным

$$U_1 = U_0 \frac{R'_1}{R'_1 + R_2} = U_0 \frac{\frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0}}{\frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0} + R_2} = U_0 \frac{R_1 R_0}{R_1 R_0 + R_2 (R_1 + R_0)}, \quad (4)$$

а сила тока через амперметр

$$I_A = \frac{U_1}{R_0} = U_0 \frac{R_1}{R_1 R_0 + R_2 (R_1 + R_0)}. \quad (5)$$

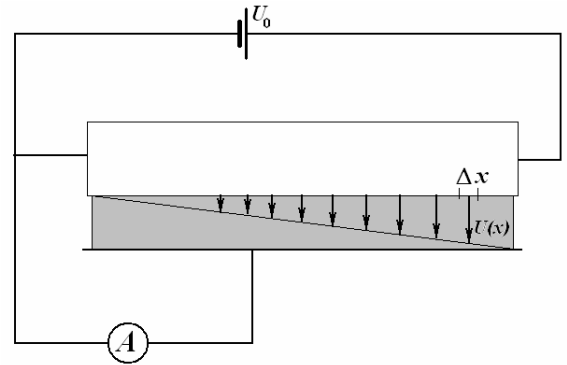
Если сопротивление резистора R_0 велико, то можно пренебречь его проводимостью и считать, что напряжение на нем совпадает с напряжением, рассчитанным по формуле (2), т.е.

$$U_1 \approx U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (6)$$

Сила тока в этом случае оказывается равной

$$I_A = \frac{U_0}{R_0} \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (7)$$

3.4 При решении данного пункта задачи следует учитывать, что ток течет поперек изоляционного слоя, причем распределение тока (точнее плотности тока) вдоль цилиндра не будет однородным. Так как сопротивление изоляции велико, то и измеряемый ток будет малым. Следовательно, распределение напряжений $U(x)$ между элементом Δx цилиндра и хорошо проводящей трубкой будет примерно таким же, как при отключенном амперметре, то есть меняться по линейному закону от U_0 до нуля. Это дает основание использовать в качестве среднего напряжения между цилиндром и проводящей трубкой среднее арифметическое напряжений на концах цилиндра, то есть $\frac{U_0}{2}$. Следовательно, измеряемый ток равен



цилиндра, то есть $\frac{U_0}{2}$. Следовательно, измеряемый ток равен

$$I = \frac{U_0}{2R'} . \quad (8)$$

Где $R' = \rho \frac{h}{2\pi rL}$ - сопротивление изоляционного слоя при протекании тока «поперек».

Таким образом, получаем

$$I = \frac{U_0 \cdot 2\pi rL}{2\rho h} \Rightarrow \rho = \frac{U_0 \pi rLU_0}{Ih} . \quad (9)$$

11 класс.

Задание 1. Электрическое поле Земли

1.1 Согласно закону Гука удлинение пружины под действием силы тяжести $\Delta l_1 = \frac{mg}{k}$, где k – коэффициент упругости пружины. Отсюда можем выразить

$$k = \frac{mg}{\Delta l_1} . \quad (1)$$

После подключения шарика к источнику постоянного напряжения его потенциал относительно Земли станет равным напряжению источника. При этом на шарике появится электрический заряд q , который можно найти из условия

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = U \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 rU . \quad (2)$$

Соответственно, со стороны электрического поля Земли на шарик начнет действовать сила, направленная вниз и равная

$$F = qE = 4\pi\epsilon_0 rUE . \quad (3)$$

Искомое удлинение пружины Δl_2 после замыкания ключа K найдем из равенства

$$k\Delta l_2 = mg + F \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg + F}{k} = \frac{mg + F}{mg} \Delta l_1 . \quad (4)$$

Таким образом, отношение удлинений пружины до и после замыкания ключа

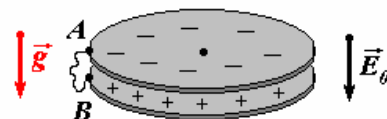
$$\epsilon = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{\Delta l_1} = \frac{F}{mg} = \frac{4\pi\epsilon_0 rUE}{mg} . \quad (5)$$

Расчет дает значение

$$\varepsilon \approx 1,0 \cdot 10^{-4}. \quad (6)$$

Как видим, удлинение пружины составит крайне малую величину, равную сотым долям процента от Δl_1 . Зафиксировать столь малое смещение пружины будет практически невозможно. Следовательно предлагаемая методика измерения заряда планеты является неприемлемой.

1.2 При зарядке дисков в поле Земли посредством электростатической индукции на них появятся электрические заряды, которые, согласно принципу электростатической защиты, создадут электрическое поле, напряженность которого равна по модулю и противоположна по направлению напряженности \vec{E}_0 поля Земли (см. рис.). Считая, что диски образуют плоский конденсатор, найдем



$$q_0 = \sigma S = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E \pi R^2, \quad (7)$$

где σ – поверхностная плотность электрических зарядов на одном диске, S – площадь диска.

Как следует из рисунка, при зарядке на верхнем диске A окажется отрицательный заряд.

Соответственно, после разрыва проводника AB и переноса диска к электроскопу на диске электроскопа образуется положительный заряд такой же величины. Вследствие электронейтральности стержня электроскопа (он изолирован от корпуса диэлектрической прокладкой) на каждом из его шариков окажутся отрицательные заряды, равные по модулю $\frac{q_0}{2}$. Таким образом, после складывания $N = 10$ заряженных дисков вблизи

электроскопа на каждом из его шариков появится отрицательный заряд $q = N \frac{q_0}{2}$.

Предположим, что под действием силы Кулона \vec{F}_K нити электроскопа (с шариками) разошлись на малый угол 2α (см. рис.). Из условия равновесия шариков с учетом малости угла их расхождения ($\alpha \rightarrow 0$) получаем

$$\frac{F_K}{mg} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{a}{2l}. \quad (8)$$

Поскольку $F_K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(N \frac{q_0}{2})(N \frac{q_0}{2})}{a^2}$, то выражение (8) можно

переписать в виде

$$\frac{N^2 q_0^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2 mg} = \frac{a}{2l}. \quad (9)$$

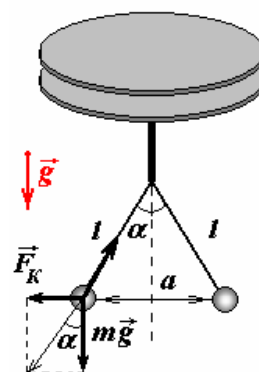
Из (9) получаем оценку расстояния, на которое разойдутся небольшие шарики электроскопа после зарядки дисков

$$a = \sqrt[3]{\frac{N^2 q_0^2 l}{8\pi\varepsilon_0 mg}} = \sqrt[3]{\frac{\pi\varepsilon_0 l N^2 E^2 R^4}{8mg}}. \quad (10)$$

Расчет по формуле (10) дает

$$a = 4,9 \text{ см}. \quad (11)$$

Как видим из (11) шарики разойдутся на вполне регистрируемое расстояние. Заметим, что подобная методика была использована при одной из первых попыток измерения заряда Земли.



1.3 Поскольку высота, на которой находится ионосфера, мала по сравнению с радиусом Земли, то можно считать, что в промежутке между Землей и ионосферой напряженность электрического поля остается постоянной.

Мысленно выделим на поверхности Земли вертикальный цилиндр с площадью основания S и высотой h , упирающийся в ионосферу (см. рис.). Сопротивление воздуха внутри этого цилиндра

$$R = \rho \frac{h}{S}. \quad (12)$$

Напряжение между торцами цилиндра найдем, используя связь между напряжением и напряженностью однородного электростатического поля

$$U = E \cdot h \quad (13)$$

Применяя закон Ома, получим значение тока утечки

$$I = \frac{U}{R} = \frac{ES}{\rho}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) значение площади земной поверхности $S = 4\pi R_3^2$, окончательно получаем

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{4\pi R_3^2 E}{\rho} = 1,8 \text{ кА}. \quad (15)$$

Полученное большое значение тока утечки в значительной степени обусловлено большим значением площади земной поверхности.

Для оценки времени τ разрядки Земли потребуем, чтобы за это время между ионосферой и Землей был перенесен заряд, равный заряду Земли. Будем также считать, что в процессе разрядки Земли сила тока остается постоянной, хотя в реальности она уменьшается вследствие уменьшения напряженности поля Земли. Тогда

$$I_1 \tau = \{(15)\} = \frac{4\pi R_3^2 E}{\rho} \tau = q.$$

С учетом выражения для напряженности $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_3^2}$ электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью, преобразуем полученное равенство к виду

$$\frac{\tau}{\rho\epsilon_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \rho\epsilon_0. \quad (16)$$

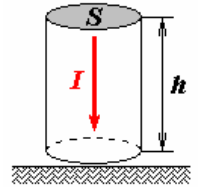
Расчет по формуле (16) дает неожиданный результат

$$\tau = 2,6 \cdot 10^2 \text{ с} = 4,3 \text{ мин}. \quad (17)$$

Таким образом, вследствие конечного сопротивления воздуха между Землей и ионосферой наша планета разрядилась бы довольно быстро и утратила бы свой электрический заряд. Однако наблюдения показывают, что заряд Земли не уменьшается с течением времени. Это говорит о том, что в природе существует механизм непрерывной зарядки Земли, обеспечивающий поступление новых порций заряда и компенсирующий ток утечки.

1.4 При достаточно сложном механизме формирования и распределения электрических зарядов внутри и на поверхности грозового облака ключевым моментом для возникновения молнии является возникновение *первичного канала* или *ступенчатого лидера*, который формирует траекторию основного электрического удара, производящего огромный термический, а также световой и звуковой эффекты.

Внутри этого канала проводимость воздуха значительно выше проводимости окружающего воздуха, а ток, как известно, достаточно «умен», поскольку выбирает путь наименьшего сопротивления.



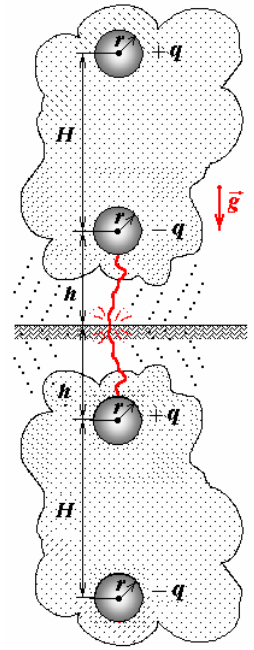
Для расчета заряда грозовой тучи построим заряд-изображение небольшого сферического заряда ее нижней части, заряженной отрицательно, относительно проводящей поверхности Земли (см. рис). Тогда суммарная напряженность поля зарядов тучи и индуцированных зарядов на поверхности Земли может быть оценена как

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h^2} = E_1 \quad \Rightarrow \quad q = 2\pi\epsilon_0 E_1 h^2 = 0,17 \text{ Кл}. \quad (18)$$

1.5 При силе тока утечки I_1 за сутки ($t = 86400 \text{ с}$) Земля потеряет заряд $q_1 = I_1 t$. Согласно условию, этот же заряд планета должна получить в результате грозовой активности. Таким образом

$$I_1 t = N_3 I_2 \tau_2 \quad \Rightarrow \quad N_3 = \frac{I_1 t}{I_2 \tau_2}. \quad (19)$$

Расчет дает, что каждые сутки на планете гремит около $N_3 \approx 2 \cdot 10^4$ гроз, львиная доля которых приходится на тропические пояса Земли.



Задание 2. «Ваттметр»

1.1 Если по участку течет ток I , то падение напряжения на диоде

$$U_D = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{k}} \quad (1),$$

а напряжение на резисторе

$$U_R = IR \quad (2).$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов на всем участке цепи:

$$U_D + U_R = \Delta\varphi \quad (3).$$

Подставляя значения (1) и (2), получим квадратное уравнение относительно \sqrt{I} :

$$IR + \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{I} - \Delta\varphi = 0 \quad (4).$$

Физический смысл имеет только положительный корень этого уравнения:

$$\sqrt{I} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \quad (5).$$

Тогда

$$I = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2 \quad (6).$$

1.2 Разность потенциалов на резисторе:

$$\Delta\varphi_R = IR = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2 R \quad (7).$$

1.3 При выполнении условия $kR\Delta\varphi \ll 1$, формула (6) преобразуется к виду:

$$I \approx \left(\frac{-1 + (1 + 2kR\Delta\varphi)}{2R\sqrt{k}} \right)^2 = k(\Delta\varphi)^2 \quad (8),$$

а формула (7) – к виду:

$$\Delta\varphi_R = Rk(\Delta\varphi)^2 \quad (9).$$

2.1 Т.к. $R \gg R_H$, то ток через резисторы R_1 равен току через нагрузку. Поэтому падение напряжения на резисторе R_1 :

$$U_1 = IR_1 \quad (10).$$

Тогда потенциал точки B :

$$\varphi_B = U - U_1 = U - IR_1 \quad (11).$$

Напряжение на участке AE равно U . Напряжение на резисторе R определим, воспользовавшись выражением (9):

$$\Delta\varphi_{RAE} = RkU^2 \quad (12).$$

Тогда потенциал точки C :

$$\varphi_C = 0 + \Delta\varphi_{RAE} = RkU^2 \quad (13).$$

Напряжение на участке BF равно $\varphi_B = U - IR_1$. Поэтому напряжение на резисторе R :

$$\Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2 \quad (14).$$

Потенциал точки D :

$$\varphi_D = 0 + \Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2 \quad (15).$$

2.2 Разность потенциалов между точками C и D :

$$\begin{aligned} U_V = \varphi_C - \varphi_D &= RkU^2 - Rk(U - IR_1)^2 = \\ &= 2kRR_1UI - kRR_1^2I^2 = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1I}{2U}\right) \end{aligned} \quad (16).$$

Ток и напряжения связаны законом Ома, т.е.:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_H + R_1} \quad (17).$$

Поэтому показания вольтметра:

$$U_V = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_H)}\right) \quad (18).$$

Коэффициент ξ :

$$\xi = 2kRR_1 \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_H)}\right) \quad (19).$$

2.3 При выполнении условия $R_1 \ll R_H$ выражение для коэффициента ξ принимает вид:

$$\xi = 2kRR_1 \quad (19),$$

Т.е. действительно не зависит от сопротивления нагрузки.

2.4 Относительная погрешность измерения:

$$\eta = \frac{kRR_1^2}{R_1 + R_H} \approx \frac{kRR_1^2}{R_H} \quad (20).$$

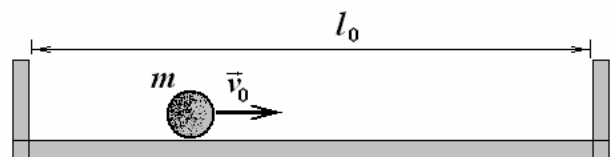
Задание 3. «Сила и импульс»

3.1 Импульс, полученный стенкой за одно столкновение равен

$$\Delta p = 2mv_0, \quad (1)$$

время между ударами, очевидно, равно

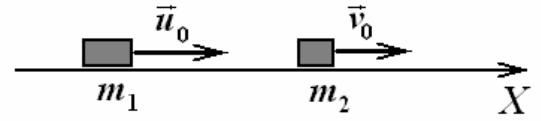
$$\Delta t = 2 \frac{l_0}{v_0} \quad (2)$$



Следовательно, средняя сила давления шарика на стенку равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{l_0}. \quad (3)$$

3.2 Для определения скоростей тел после соударения следует воспользоваться законами сохранения импульса и механической энергии



$$\begin{aligned} m_1 u_0 + m_2 v_0 &= m_1 u_1 + m_2 v_1 \\ \frac{m_1 u_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения системы уравнений, преобразуем их и разделим одно на другое:

$$\begin{cases} m_1(u_0^2 - u_1^2) = m_2(v_1^2 - v_0^2) \\ m_1(u_0 - u_1) = m_2(v_1 - v_0) \end{cases} \Rightarrow u_0 + u_1 = v_1 + v_0 \Rightarrow v_1 = u_0 - v_0 + u_1.$$

Тем самым, получаем систему двух линейных уравнений, решение которых находится легко

$$m_1 u_0 + m_2 v_0 = m_1 u_1 + m_2 (u_0 - v_0 + u_1) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_0 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \\ v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_0 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \end{cases}. \quad (5)$$

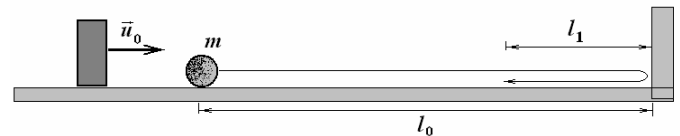
Если масса второго тела пренебрежимо мала ($m_2 \approx 0$), то из формул (5) следует

$$\begin{cases} u_1 = u_0 \\ v_1 = 2u_0 - v_0 \end{cases}. \quad (6)$$

3.3.1 Полагая в формуле (6) $v_0 = 0$, находим скорость шарика после первого удара

$$v_1 = 2u_0. \quad (7)$$

3.3.2 До следующего столкновения поршень пройдет расстояние $(l_0 - l_1)$, а шарик $(l_0 + l_1)$. Приравнявая их времена движения, получим уравнение



$$\frac{l_0 - l_1}{u_0} = \frac{l_0 + l_1}{2u_0}. \quad (8)$$

Из которого находим точку второго удара

$$l_1 = \frac{1}{3} l_0. \quad (9)$$

И время между ударами

$$\tau_1 = \frac{l_0 - l_1}{u_0} = \frac{2}{3} \frac{l_0}{u_0}. \quad (10)$$

3.3.3 Из формул (6) следует, что после каждого удара скорость шарика увеличивается на $2u_0$ (следует учесть, что шарик при всяком ударе летит навстречу поршню):

$$v_k = 2u_0 + v_{k-1}. \quad (11)$$

Таким образом, скорости шарика после ударов образуют арифметическую прогрессию, поэтому явное выражение для скорости шарика после k -того столкновения с поршнем имеет вид

$$v_k = 2k \cdot u_0. \quad (12)$$

Чтобы установить связь между координатами точек последовательных ударов запишем уравнение, аналогичное уравнению (8), из которого определим

$$\frac{l_{k-1} - l_k}{u_0} = \frac{l_{k-1} + l_k}{v_k} = \frac{l_{k-1} + l_k}{2ku_0} \Rightarrow l_k = \frac{2k-1}{2k+1} l_{k-1}. \quad (13)$$

Последовательно подставляя значения легко найти, что

$$l_k = \frac{1}{2k+1} l_0. \quad (14)$$

Время между последовательными ударами рассчитывается по формуле

$$\tau_k = \frac{l_{k-1} - l_k}{u_0} = \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \frac{l_0}{u_0} = \frac{2}{4k^2 - 1} \frac{l_0}{u_0}. \quad (15)$$

Средняя сила давления шарика на поршень после k -того удара равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{2v_k}{\tau_k} = m \frac{2 \cdot 2k \cdot u_0}{\frac{2}{4k^2 - 1} \frac{l_0}{u_0}} = 2k(4k^2 - 1) \frac{mu_0^2}{l_0}. \quad (16)$$

После большого числа ударов ($k \gg 1$) можно считать, что $(4k^2 - 1) \approx 4k^2$, и

$\frac{l_0}{l_k} = 2k - 1 \approx 2k$, поэтому

$$F = 2k(4k^2 - 1) \frac{mu_0^2}{l_0} \approx 8k^3 \frac{mu_0^2}{l_0} \approx \frac{mu_0^2}{l_0} \left(\frac{l_0}{l} \right)^3. \quad (17)$$

Следовательно, $\gamma = -3$, $A = mu_0^2 l_0^2$.