

## Задача 9-1. Подобие

**1.1** Очевидно, что при увеличении линейных размеров бюста в 2 раза, его объем, масса и стоимость возрастут в 8 раз.

**1.2** Суммарная сила атмосферного давления есть сила Архимеда, которая пропорциональна объему шара. Следовательно, при увеличении радиуса в 2 раза, сила давления воздуха возрастет в 8 раз. Здесь учтено, что при заданном радиусе шара можно пренебречь изменением плотности воздуха на высотах равных, диаметру шара.

**1.3** Когда температура стержня установилась, количество теплоты, выделяющейся при прохождении тока, станет равным количеству теплоты, уходящей в окружающий воздух. Мощность выделяющейся теплоты определяется законом Джоуля – Ленца, который при постоянном напряжении имеет вид

$$P_+ = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\rho \frac{l}{\pi r^2}} = \frac{U^2 \pi r^2}{\rho l}. \quad (1)$$

Разумно предположить, что мощность теплоты, уносимой в воздух пропорционально площади боковой поверхности стержня и разности температур стержня и окружающей среды:

$$P_- = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t \quad (2)$$

Приравнивая эти мощности, найдем температуру стержня (учитывая, что температура воздуха равна нулю):

$$\frac{U^2 \pi r^2}{\rho l} = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t \Rightarrow t = \frac{U^2 \pi r^2}{\rho l} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r l} = \frac{U^2 r}{2\alpha \rho l^2}. \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что при увеличении размеров стержня в 2 раза температура стержня уменьшится в 2 раза, т.е. станет равной  $t_2 = 5,0^\circ\text{C}$ .

## Задача 9-2. Велокомпьютер

### Часть 1. «Эволюция» средней скорости

1.1 Согласно определению средней скорости можем записать

(1)

Далее учтём условие малости промежутков  $\Delta S \ll S$  и  $\Delta t \ll t$  и примечание в условии задачи

$$\frac{S}{t + \Delta t} = \frac{S}{t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)} \approx \frac{S}{t} \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{S}{t} - \frac{S \Delta t}{t^2}$$

(2)

$$\frac{\Delta S}{t + \Delta t} \approx \frac{\Delta S}{t}$$

(3)

С учётом последних равенств (1) можно переписать в виде

(4)

Как следует из (4), изменение (приращение) средней скорости велосипедиста можно записать как

(5)

Из (5) находим искомые выражения для коэффициентов  $A$  и  $B$

$$A = \frac{1}{t}, B = -\frac{S}{t^2}$$

(6)

Используя (6) найдём размерности полученных коэффициентов

(7)

1.2 Расчёт даёт отрицательное значение для изменения средней скорости велосипедиста на рассматриваемом малом участке дистанции (т.е. его средняя скорость при этом уменьшается)

(8)

1.3 Если значение средней скорости велосипедиста на некотором малом участке дистанции постоянно, то понятно, что его изменение (приращение) равно нулю. Тогда, согласно (5), имеем

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{t}$$

(9)

Условие (9) можно сформулировать следующим образом: если средняя скорость  $\left(\frac{S}{t}\right)$  движения велосипедиста на данном малом участке дистанции не изменяется, то он «удачно»

едет с мгновенной скоростью  $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t)\right)$ , равной средней. Соответственно, если мгновенная скорость  $v(t)$  больше средней, то средняя скорость будет расти, а если  $v(t)$  меньше средней  $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{S}{t}\right)$  – то убывать.

## Часть 2. «Странная» гонка

2.1 Построим график зависимости мгновенной скорости  $v(t)$  велосипедиста от времени в течение гонки (рис. 1). Поскольку ускорение движения велосипедиста постоянно, то его мгновенная скорость линейно возрастает на первой половине дистанции (времени), достигая максимального значения на середине дистанции  $S_1 = 0,50$  км через промежуток

времени  $t_0 = \sqrt{S/a} = 45$  с, а далее – также линейно убывает. При этом, как следует из (9), даже на второй половине дистанции средняя скорость велосипедиста продолжает расти

некоторое время  $t$ , несмотря на то, что мгновенная скорость  $v$  уже убывает. Действительно, до тех пор, пока его мгновенная скорость  $v(t)$  будет больше средней на всей дистанции приращение будет положительно.

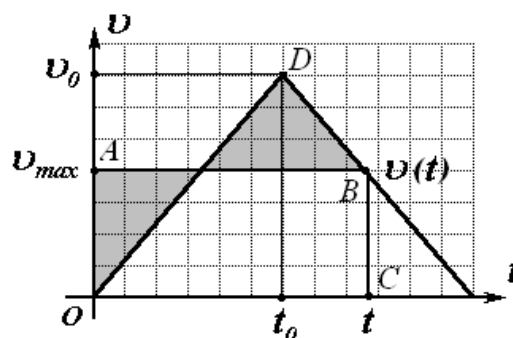


Рис. 1

2.2 На участке  $OD$  (см. рис. 1), где средняя скорость равна половине мгновенной скорости, поскольку движение велосипедиста является равноускоренным. Следовательно, здесь

$$(10)$$

т.е. искомая зависимость представляет собой прямую, выходящую из начала координат.

Далее ( $t_0 < t < 2t_0$ ) мгновенная скорость начинает убывать, поэтому для нахождения средней скорости необходимо найти весь путь (площадь фигуры  $ODBC$  на рис. 1) и разделить его на все время движения велосипедиста. При этом получим зависимость

$$(11)$$

График полученной зависимости (11) для , построенный по точкам (для удобства в

безразмерных координатах  $v^* = \frac{v}{v_0}$  и

$\tau = \frac{t}{t_0}$ ) приведен на рисунке 2 (построение этого графика на отдельном бланке от школьников не требуется).

На участке от нуля до единицы график линейно растет до значения 0,5, затем испытывает максимум и к концу дистанции, вновь приходит к значению 0,5, поскольку велосипедист на всех этапах двигался только равноускоренно.

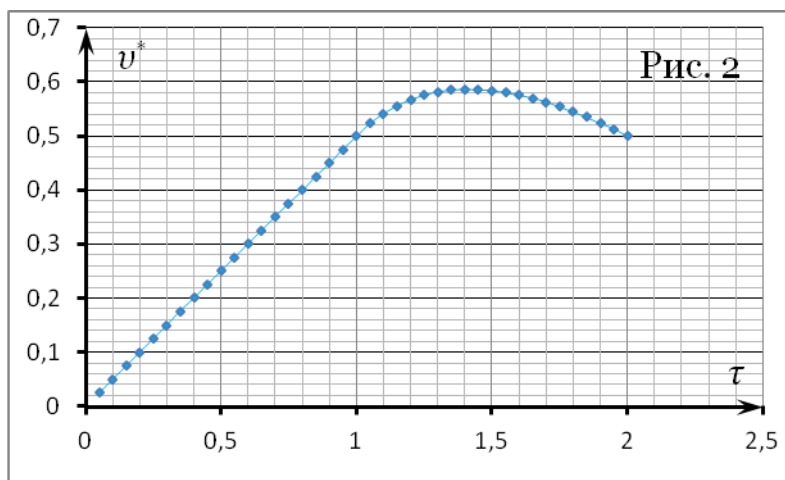


Рис. 2

Из графика также следует, что средняя скорость велосипедиста достигает максимума где-то на второй половине дистанции в окрестности точки  $\tau \approx 1,4$ .

2.3 Если некоторая функция в данной точке испытывает максимум (или минимум), то в окрестностях этой точки её приращение (изменение) равно нулю. Это легко понять,

проходящая по вершине холма: при этом наша высота будет оставаться практически неизменной.

Но если вблизи максимума функции её приращение равно нулю, то выполняется условие (9). Следовательно, в момент, когда средняя скорость велосипедиста достигает своего максимального значения, справедливо равенство

$$(12)$$

Иными словами, искомая максимальная средняя скорость велосипедиста должна быть равна его мгновенной скорости  $v(t)$ .

Это значит, что график функции  $v(t)$  пересекает график функции «сверху вниз» строго в точке её максимума, что и должно получиться при правильном построении двух графиков в одной системе координат (рис. 3).

Пусть это произошло через промежуток времени  $t$  после достижения максимума мгновенной скорости велосипедиста (см. Рис. 1).

Поскольку велосипедист уже начал замедляться, то его скорость в этот момент будет равна

$$v(t) = v_0 - at$$

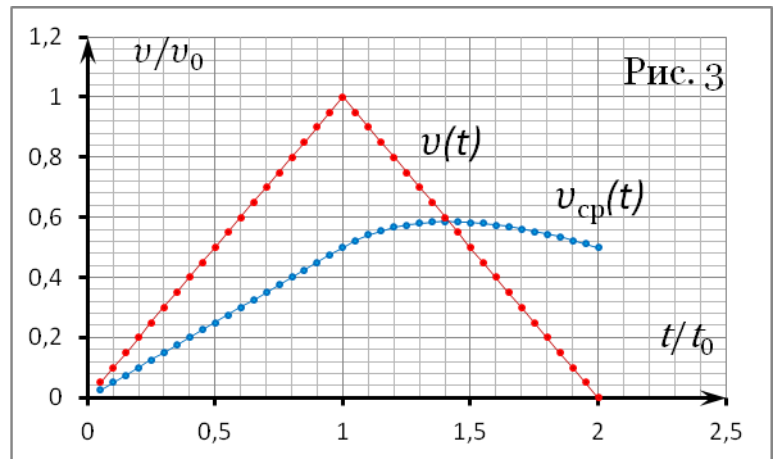


Рис. 3

Соответственно, условие (12) можно переписать в виде

$$v(t) = v_0 - at = \frac{\frac{S}{2} + \frac{v_0 + (v_0 - at)}{2}t}{t_0 + t} = v_{\max} \quad (13)$$

Из (13) получаем квадратное уравнение относительно  $t$

$$at^2 + 2v_0t - S = 0, \quad (14)$$

которое имеет два корня. Поскольку промежуток времени  $t$  движения велосипедиста положителен, то отрицательный корень уравнения следует отбросить как не имеющий физического смысла.

Выбираем положительный корень для  $t$

$$t = \sqrt{\frac{S}{a}} (\sqrt{2} - 1) = 0,41t_0 \quad (15)$$

Подставляя полученное значение для  $t$  в (13), находим максимальное значение средней скорости велосипедиста

$$(16)$$

и расстояние от места старта, на котором оно будет зафиксировано велокомпьютером

$$S \quad (17)$$

#### 2.4 Расчёт даёт значения

$$(18)$$

$$S_2 = 2(\sqrt{2} - 1)S = 8,3 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,83 \text{ км} \quad (19)$$

Интересно, что уравнение (14) можно получить и более простым путем, если заметить, что выделенные на Рис.1 площади должны быть одинаковы, поскольку рассматриваемые фигуры  $OABC$  и  $ODBC$  равновелики. Тогда

$$\Rightarrow t^2 + 2t_0 t - t_0^2 = 0 \quad (20)$$

С учётом того, что  $t_0 = \sqrt{S/a}$  и  $v_0 = \sqrt{aS}$ , легко убеждаемся, что (20) совпадает с (14), т.е. для  $t$  получаем тот же ответ (15).

Подчеркнем, что любители дифференцировать могут также получить уравнение (14) достаточно «стандартным» путем, взяв производную от функции средней скорости

по времени  $t$  и приравняв её нулю. Используя правило дифференцирования частного функций, в результате для определения  $t$  получим уравнение

$$\frac{at^2}{2} + at_0 t - \frac{S}{2} = 0 \quad (22)$$

которое опять же приводит нас к (14).

Как видим, все правильные способы решения, в отличие от неправильных, ведут к одному и тому же ответу.

### Часть 3. Произвольный закон движения

Заметим, что условие (9) равенства средней и мгновенной скоростей велосипедиста имеет наглядный графический смысл и в координатах  $x(t)$ . Действительно, для примера вернемся к части 2 задачи и построим график зависимости  $S(t)$  пути велосипедиста от времени.

Для этого движения он будет представлять из себя две «сшитые» параболы с различными ориентациями ветвей. При этом мгновенная скорость

велосипедиста  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t) = \tan \alpha$  равна угловому коэффициенту касательной в данной точке. Соответственно, средняя скорость равна угловому коэффициенту прямой, соединяющей данную точку с началом координат.

Равенство этих угловых коэффициентов в точке экстремума средней скорости означает, что касательная к графику должна проходить через начало координат. Построив такую касательную, из графика найдем приближенное значение  $t \approx 1,4 t_0$ , что неплохо согласуется с (15).

Используя такой же метод, найдем точку максимальной средней скорости для предложенного закона движения велосипедиста. Построим касательную к графику, проходящую через начало координат – в нашем случае она единственная и дает точку максимальной средней скорости велосипедиста на всей дистанции.

Построением (Рис. 3) находим, что искомые значения с учетом погрешностей равны

$$t_2 = 2,3 \pm 0,1 \text{ мин} \quad (23)$$

$$S_2 = 1,7 \pm 0,1 \text{ км} \quad (24)$$

Следовательно, искомое значение

$$(25)$$

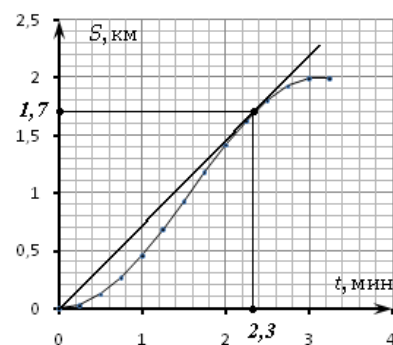
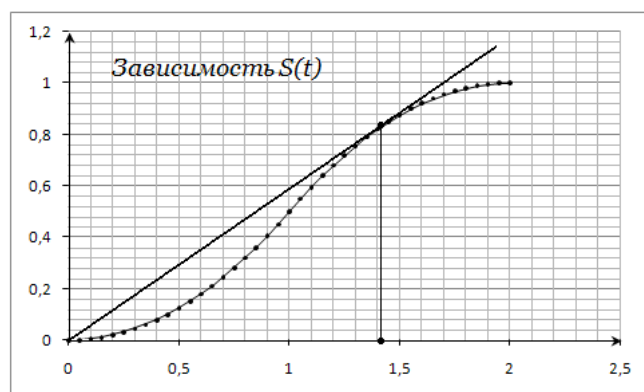
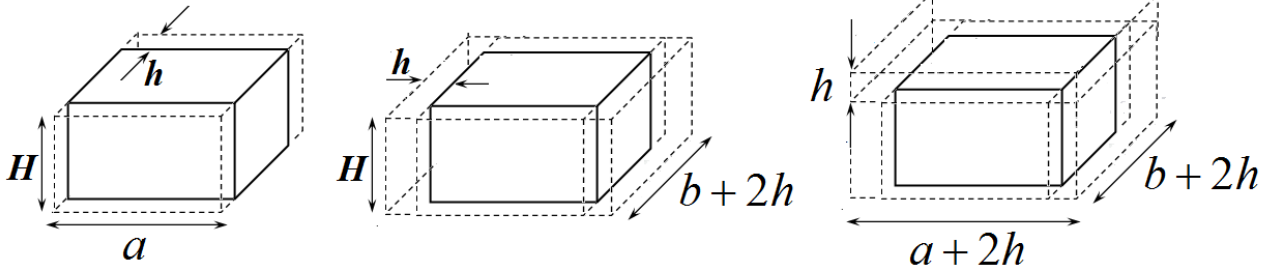


Рис. 3

### Задача 9-3. Обогрев дома.

### 1.1 – 1.2

Рассчитаем объем бетона (с правильным учетом углов дома):



Две стены:

$$V_1 = 2aHh ;$$

Еще две стены:

$$V_2 = 2(b + 2h)Hh ;$$

Потолок и пол:

$$V_3 = 2(a + 2h)(b + 2h)h .$$

Подстановка численных значений и вычисления приводят к следующему результату (округление проведено с одной запасной цифрой)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 28,8 \text{ м}^3 .$$

Масса бетона

$$m_1 = \rho_1 V = 6,3 \cdot 10^4 \text{ кг} \quad (1)$$

Его теплоемкость

$$C_1 = c_1 m_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} . \quad (2)$$

**2.4 -1.4** Масса воздуха и его теплоемкость рассчитывается по формулам

$$m_0 = abH\rho_0 = 108 \text{ кг} \quad (3)$$

$$C_0 = c_0 m_0 = 108 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} . \quad (4)$$

**2.4** При сгорании 1 литра дизельного топлива выделяется количество теплоты

$$Q_0 = \rho V q = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 43 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Дж} .$$

Из этого количества на обогрев дома пойдет

$$Q_1 = \eta Q_0 = 2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж} .$$

Стоимость этой теплоты равна 1,2 рубля, следовательно, стоимость одного джоуля теплоты равна

$$s_0 = \frac{1,2 \text{ руб}}{2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}} = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} . \quad (5)$$

Т.е. приблизительно 5 микропеек.

**2.4** В установившемся режиме, количество теплоты, поступающей от нагревателя равно, количеству теплоты, уходящей через стены, поэтому

$$P = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0) . \quad (5)$$

Где  $S = 4aH$  - площадь стен.

Из этого соотношения следует

$$t_1 = t_0 + \frac{h}{4aH\lambda_1} P. \quad (5)$$

2.3 Используя формулу (4), найдем

$$P_0 = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0) = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 7,2 \text{ кВт}. \quad (6)$$

Стоимость требуемого в течение суток топлива равна

$$S = s_0 P_0 \tau = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} \cdot 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \text{ руб}. \quad (7)$$

2.4 Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . Печь разжигают.

Количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате, равно

$$Q_0 = C_0 (t_1 - t_0) = 108 \cdot 20 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \quad (8)$$

Для расчета количества теплоты, которое пойдет на нагревание стен до достижения установившейся температуры, следует учесть, что температура внутри стен линейно изменяется от  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . Поэтому на разогрев стен потребуется количество теплоты равное

$$Q_{cm} = 4aHh\rho_1 c_1 \frac{t_1}{2} = 4 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 10 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Дж}.$$

Потолок и пол должны полностью нагреться до температуры  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Требуемое на это количество теплоты равно

$$Q_{n-n} = 2a^2 h \rho_1 c_1 t_1 = 2 \cdot 6,0^2 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 20 = 5,8 \cdot 10^8 \text{ Дж}$$

Полное количество теплоты, которое потребуется на разогрев всего дома

$$Q_1 = 8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж}. \quad (9)$$

Стоимость этой теплоты

$$S = c_0 Q_1 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} \cdot 8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 38 \text{ руб}. \quad (10)$$

Время разогрева можно оценить по формуле

$$\tau = \frac{Q_1}{P_0} = \frac{8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж}}{10 \cdot 10^3 \text{ Вт}} = 8,2 \cdot 10^4 \text{ с} = 23 \text{ часа}. \quad (11)$$

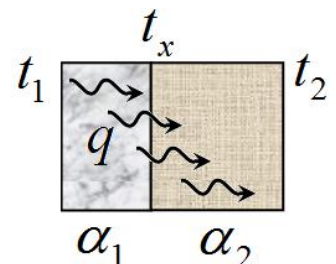
3.1 Сравнивая формулы (1) и (3), находим, что  $\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}}{0,20 \text{ м}} = 6,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (12)$$

3.2 Обозначим температуру стыка слоев  $t_x$ . Тогда плотности потоков теплоты через разные слои описываются формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 (t_1 - t_x) \\ q_2 &= \alpha_2 (t_x - t_2) \end{aligned} \quad (13)$$

В установившемся режиме  $q_1 = q_2$ . Из этого условия находим температуру места соединения слоев



$$\alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_2(t_x - t_2) \Rightarrow t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (14)$$

Плотность потока теплоты можно выразить через температуры границ составного слоя, как

$$q = q_2 = q_1 = \alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_1 \left( t_1 - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (t_1 - t_2). \quad (15)$$

Тем самым доказана формула (4) условия задачи. Видно, что проводимость составного слоя равна<sup>1</sup>

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (16)$$

**3.3 -3.4** Рассчитаем тепловую проводимость слоя изоляции

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{h_2} = \frac{6,0 \cdot 10^{-2} \frac{Bm}{m \cdot K}}{0,10m} = 6,0 \cdot 10^{-1} \frac{Bm}{m^2 \cdot K}. \quad (17)$$

Тепловая проводимость стены с изоляцией в соответствии с формулой (16) оказывается равной

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 0,60}{6,6} \frac{Bm}{m^2 \cdot K} = 0,55 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}. \quad (18)$$

В этом случае условие стационарности температуры будет иметь вид

$$P = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0). \quad (19)$$

Подставляя численные значения, находим требуемую тепловую мощность

$$P_1 = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0) = 2 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot 20 = 660 Bm, \quad (20)$$

Что в  $\frac{P_0}{P_1} = \frac{7200}{660} = 11$  раз меньше, чем мощность обогрева дома без утеплителя.

**3.5** По формуле (14) рассчитаем температуру внешней стороны бетонной стенки

$$t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 20}{6,6} = 18^\circ. \quad (21)$$

Фактически всю бетонную коробку необходимо нагреть на  $20^\circ$ . Поэтому количество теплоты, требуемое на это равно

Следовательно, на нагревание стен требуется количество теплоты, равное

$$Q_2 = C_1 t_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{Дж}{К} \cdot 20K = 11,6 \cdot 10^8 Дж, \quad (22)$$

Стоимость этой теплоты  $S_2 = c_0 Q_2 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{руб}{Дж} \cdot 1 \cdot 10^8 Дж = 53 руб$ , что больше, чем при

нагреве стен без утеплителя.

Время разогрева утепленного дома

$$\tau_2 \approx \frac{Q_2}{P_0} = 1,2 \cdot 10^5 c = 32 часа.$$

<sup>1</sup> Не сложно доказать, что в общем случае произвольного числа слоев

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$$



3.6 На поддержание комнатной температуры утепленного дома в течение суток потребуется количество теплоты  $Q = P_1 \tau = 660 \cdot 24 \cdot 3600 = 5,7 \cdot 10^7$  Дж, стоимость которой  $S = 2,6$  руб. Следовательно на поддержание постоянной температуры в течение 7 дней надо затратить 18 руб, что значительно меньше чем стоимость разогрева. Следовательно, поддерживать постоянную температуру выгоднее, чем каждую субботу разогревать дом, тем более, что в этом случае не придется сидеть в холодном доме всю субботу!

## Задача 10 - 1. Подобие

1.1 Время падения легко рассчитывается по формуле

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Теперь необходимо выразить ускорение свободного падения на планете через ее радиус. По известным формулам:

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{R^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho R. \quad (2)$$

Таким образом, ускорение на меньшей планете в два раза меньше ускорения свободного падения на Земле. Следовательно, время падения в соответствии с формулой (1) увеличится в  $\sqrt{2}$  раз, т.е.

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

1.2 Теплота, выделяющаяся при замерзании воды на нижней поверхности льда должна пройти через слой льда. Поток теплоты, очевидно, обратно пропорционален толщине льда. Поэтому время намерзания  $\Delta t$  слоя малой толщины  $\Delta h$  связано уравнением теплового баланса

$$\Delta h = \frac{\beta}{h} \Delta t. \quad (1)$$

Где  $\beta$  постоянная величина, зависящая от удельной теплоты кристаллизации, теплопроводности, температуры воздуха. Из уравнения (1) с учетом подсказки следует, что

$$h^2 = 2\beta t. \quad (2)$$

Из этого уравнения видим, что при увеличении времени в два раза толщина возрастает в  $\sqrt{2}$  раз. Таким образом, толщина льда станет равной

$$h_1 = \sqrt{2}h = 14 \text{ см} \quad (3)$$

1.3 Изменение высоты слоя пропорционально количеству теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока, которое в свою очередь (при постоянной силе тока) пропорционально сопротивлению слоя, т.е.

$$\Delta h = -\frac{\beta}{h} \Delta t, \quad (1)$$

Где  $\beta$  постоянная величина, зависящая от удельной теплоты размеров ванны, удельного сопротивления и удельной теплоты испарения жидкости, силы проходящего тока.

Из уравнения (1) следует, что

$$\Delta h = -\frac{\beta}{h} \Delta t \Rightarrow \Delta(h^2) = -2\beta t \Rightarrow h^2 - h_0^2 = -2\beta t. \quad (2)$$

Для времени  $\tau_0$  получим

$$\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 - h_0^2 = -2\beta t \Rightarrow \frac{3}{4}h_0^2 = 2\beta\tau_0. \quad (3)$$

Для времени полного выкипания

$$h_0^2 = 2\beta\tau_1. \quad (4)$$

Из этих выражений следует, что  $\tau_1 = \frac{4}{3}\tau_0$ . Поэтому все жидкость выкипит через время

$$\tau = \tau_1 - \tau_0 = \frac{\tau_0}{3}$$

## Задача 10 - 2. Утечка ... центра масс

### Часть 1. «Сложный» график

1.4 Удобно решать задачу в «обратном» порядке, рассматривая медленный подъём жидкости в сосуде от нуля до некоторого уровня  $x$ . При таком подходе сразу понятно, что начальная точка ( $x = 0$ ) *Графика 1* – это и есть искомая высота  $h_1$  центра масс пустого сосуда, поскольку воды в сосуде ещё пока нет

$$h_1 = 10 \text{ см} = 1,0 \text{ дм} . \quad (1)$$

Далее заметим, что при максимальной высоте уровня  $x = 20 \text{ см}$  воды в сосуде центр масс системы вновь находится на высоте  $h_1$  от дна. Это вполне возможно, поскольку центр масс воды лежит на половине её высоты. Следовательно, искомая начальная высота

$$h_0 = 2h_1 = 20 \text{ см} = 2,0 \text{ дм} . \quad (2)$$

1.5 Если уровень воды в сосуде находится на высоте  $x$  от дна, то масса воды, находящейся в сосуде, равна

$$m_2 = \rho V = \rho Sx = \rho \pi R^2 x , \quad (3)$$

а её центр масс, соответственно, находится на высоте  $\frac{x}{2}$  от дна.

Если центр масс сосуда (без воды) массой  $m_1$  находится на известной высоте  $h_1$  от дна, то, согласно подсказке, в данный момент времени центр масс системы будет находиться между центрами масс воды и сосуда на высоте

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + \rho \pi R^2 x} = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{[2(m)]_1 + \rho \pi R^2 x} . \quad (4)$$

Выберем несколько «удобных» точек на *Графике 1*, когда функция «на глаз» проходит через узлы координатной сетки, минимум и т.д. Это, например, точки с координатами  $(0,3; 0,6)$ ,  $(0,55; 0,55)$ ,  $(0,9; 0,6)$ ,  $(1,5; 0,8)$  и т.д.

Из (4) выразим искомую массу  $m_1$  пустого сосуда через координаты  $(x; h)$  выбранной точки на *Графике 1*

$$m_1 = \rho \pi R^2 \frac{2h - x}{2(h_1 - h)} x . \quad (5)$$

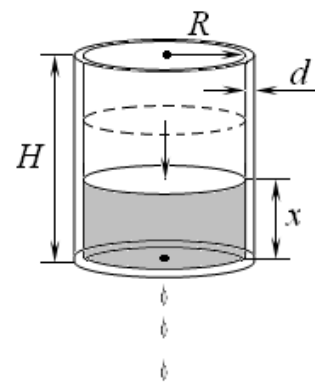
Используя (5), несложно вычислить массу  $m_1$  сосуда без воды для каждой из выбранных нами на *Графике 1* точек. Результаты вычислений (до трёх значащих цифр, с учётом запасной цифры) занесём в таблицу

Точка	$m_1$ , кг
$(0,3; 0,6)$	0,265
$(0,55; 0,55)$	0,264
$(0,9; 0,6)$	0,265
$(1,5; 0,8)$	0,294

Как следует из таблицы, последняя точка значительно «вываливается» из численного диапазона первых трёх точек. Такие точки называются «промахами» и могут быть опущены при дальнейших расчётах. Если уж совсем внимательно присмотреться, то можно заметить, что эта «проблемная» точка  $(1,5; 0,8)$  действительно лежит несколько ниже узла координатной сетки.

Усредняя первые три результата, и округляя вычисление до двух значащих цифр (как в условии), получаем окончательный ответ

$$m_1 = 0,2647 \text{ кг} \approx 0,26 \text{ кг} \quad (6)$$



Для удобства анализа полученной функции и вычислений  $m_1$  введём безразмерные переменные для высоты центра масс системы  $h^* = \frac{h}{h_1}$  и высоты жидкости в сосуде  $x^* = \frac{x}{h_1}$  (т.е. будем измерять их в величинах « $h_1$ »). Тогда зависимость (4) можно переписать в виде

$$h^*(x^*) = \frac{2 + A \cdot (x^*)^2}{2(1 + A \cdot x^*)} = \quad , \quad (7)$$

где остался единственный безразмерный параметр зависимости

$$A = \frac{\rho S h_1}{m_1} = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} . \quad (8)$$

По данным таблицы в нашем случае значение параметра

$$A = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} = 3,02 . \quad (9)$$

Интересно, что если подставить в (4) значения  $x = 0$  и  $h(x) = h_1$ , то мы придём к значениям (1) и (2).

**1.6** Для нахождения минимума функции (4) (или (7)) заметим, что при повышении уровня воды в сосуде на начальном этапе ( $x < h(x)$ )

каждый следующий небольшой слой воды массой  $\Delta m_i$  (Рис. 1, а) немного понижает положение центра масс системы, поскольку он находится ниже его.

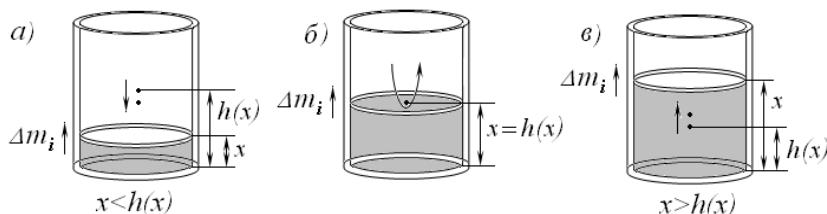


Рис. 1

Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень жидкости  $x$  не достигнет высоты  $x = h(x)$  центра масс системы (Рис. 1, б). Далее ( $x > h(x)$ ) уже каждый следующий слой воды будет приподнимать положение центра масс системы (Рис. 1, в).

Следовательно, при прохождении минимума функции  $h(x)$  на *Графике 1* уровень воды  $x_1$  должен совпадать с центром масс системы (ордината графика равна его абсциссе).

Для подтверждения справедливости этого вывода удобно построить (от школьников не требуется!) на одной координатной сетке (Рис. 2) графики зависимостей уровня  $y = x$  воды в сосуде и высоты центра масс системы  $h(x)$  от дна сосуда. Как следует из построения, график зависимости  $y = x$  действительно пересекает график зависимости  $h(x)$  «снизу вверх» в точке минимума.

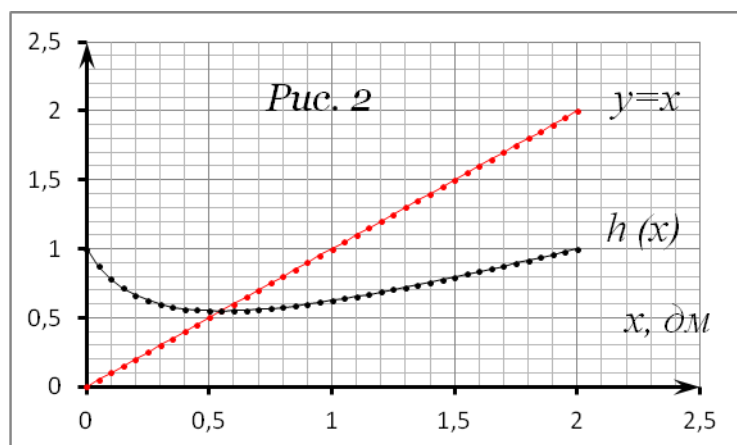


Рис. 2

Согласно (4) при этом можем записать

$$h(x) = x_1 = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x_1^2}{2(m_1) + \rho \pi R^2 x_1} , \quad (10)$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно  $x_1$

$$\rho \pi R^2 x_1^2 + 2m_1 x_1 - 2m_1 h_1 = 0 . \quad (11)$$

Отбрасывая отрицательный корень, как не имеющий физического смысла, получаем искомое значение

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2} \quad (12)$$

Подчеркнём, что для нахождения минимума функции (4) (или (7)) можно также использовать и традиционный подход: вычислить производную и приравнять её к нулю. Убедитесь самостоятельно, что при этом Вы получите уравнение (11), и в итоге – такой же результат (12).

Интересно, что согласно полученным данным устойчивость сосуда с водой, которая определяется высотой центра масс, по мере вытекания воды сначала увеличивается, а потом уменьшается. Данный эффект можно наблюдать на тубах с зубной пастой, которые по мере расхода пасты, бывает сложно поставить вертикально.

**1.7** Находя из *Графика 1* абсциссу минимума функции  $x_1 = 0,55$  дм, выразим из (12) массу  $m_1$  сосуда вторым способом

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = 0,2638 \text{ кг} \approx 0,26 \text{ кг} \quad (13)$$

Для сравнения этого метода определения массы с методом из предыдущего пункта, находим относительную погрешность определения массы сосуда

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1} = 0,3 \% \quad (14)$$

что является отличным результатом для обработки графика «народным» методом «на глаз».

После завершения всех расчётов данной части задачи можно признаться (☺), что построение *Графика 1* проводилось при значении безразмерного параметра

$$A = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1} = 3,00 \quad (15)$$

Приятно, что мы с хорошей точностью смогли вычислить этот параметр (см. (9)), обрабатывая представленный в условии график.

## Часть 2. «Простой» сосуд

**2.1** Поскольку стенки и дно сосуда имеют одинаковую толщину  $d$  ( $d \ll R$ ), то массу  $m_3$  дна сосуда выразим как

$$m_3 = \rho_1 V = \rho_1 S_3 d = \rho_1 d \pi R^2 \quad (16)$$

где  $S_3 = \pi R^2$  – площадь дна сосуда. Соответственно, массу стенок найдем как

$$m_4 = \rho_1 d S_4 = \rho_1 d 2\pi R H \quad (17)$$

где  $H$  – искомая высота сосуда.

Так как центр масс сосуда без воды (Рис. 3) находится на высоте  $h_1$  от дна (см. (1)), то справедливо равенство (толщиной дна здесь пренебрегаем)

$$h_1 = \frac{m_3 \cdot 0 + m_4 \left(\frac{H}{2}\right)}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H \left(\frac{H}{2}\right)}{\rho_1 d \pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R + 2H} \quad (18)$$

Из (18) находим

$$H^2 - 2h_1 H - h_1 R = 0 \quad (19)$$

Откуда

$$H = h_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R}{h_1}}\right) = 22 \text{ см} \quad (20)$$

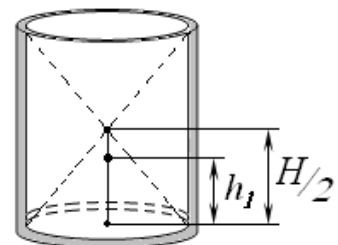


Рис. 3

**2.2** Для определения толщины стенок сосуда воспользуемся тем, что мы уже вычислили его массу (см. (13)), тогда

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = m_3 + m_4 = \rho_2 d\pi R^2 + \rho_2 d2\pi RH = \rho_2 d\pi R(R + 2H) \quad (21)$$

откуда находим

$$d = \frac{m_1}{\rho_2 \pi R(R + 2H)} = 2,1 \text{ мм} \quad (22)$$

### Часть 3. Наливаем обратно ...

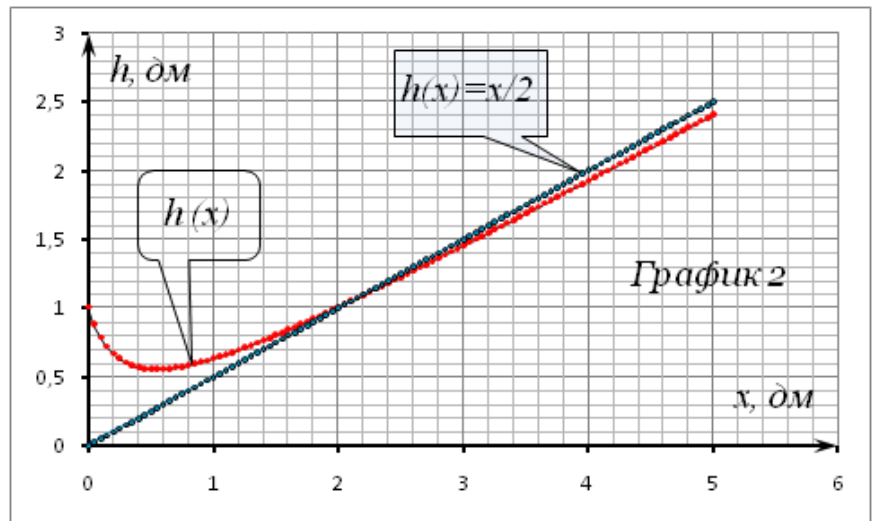
**3.1** Для решения данного пункта достаточно заметить, что при больших  $x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) масса  $m_2 = \rho V = \rho\pi R^2 x$  воды в сосуде будет значительно превышать массу самого сосуда. Это значит, что положение центра масс системы практически будет совпадать с положением центра масс столба воды, т.е. находиться на половине его высоты.

Иными словами, в данном интервале функция будет стремиться к зависимости

$$h(x) \approx \frac{x}{2} \quad (23)$$

оставаясь немного ниже ее, т.к. масса сосуда всё же отлична от нуля. На всякий случай,

используя ((4) или (7)) можно просчитать несколько точек, чтобы убедиться в справедливости приближения (23)



$x, \text{ дм}$	$h(x) = \frac{2m_1 h_1 + \rho\pi R^2 x^2}{[2(m_1) + \rho\pi R^2 x]}$	$h(x) = \frac{x}{2}$	$\varepsilon, (\%)$
2,0	1,00	1,00	0,0
2,5	1,22	1,25	2,4
3,0	1,45	1,50	3,3
3,5	1,68	1,75	4,0
4,0	1,92	2,00	4,0
4,5	2,16	2,25	4,0
5,0	2,41	2,50	3,6

Как следует из таблицы, эти графики на указанном интервале с приемлемой точностью «совпадают» друг с другом. На *Графике 2* (на всякий случай!) приведено точное построение (от школьников не требуется), из которого видно, что в данной части задачи действительно вполне достаточно догадаться пренебречь массой сосуда и записать (и построить!) функцию  $h(x) \approx \frac{x}{2}$  (можно несколько «ниже» точного значения).

### Задача 10 - 3. «Мягкая» пружина

#### Задача 10-3.

##### 1.1.

Длина всей цепочки, подвешенной вертикально

$$l = nl_1 + \Delta x \quad (1)$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} \quad (2),$$

где,  $\Delta x$  - удлинение всей цепочки.

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$  - удлинения первого, второго ... (n-1)-го звеньев, считая сверху.

Верхнее первое звено будет деформироваться под действием веса нижних  $(n - 1)$  звеньев. Условие равновесия для них имеет вид:

$$k_1 \Delta x_1 = (n - 1)m_1 g \quad (3).$$

Условие равновесия для нижних  $(n - 2)$  звеньев –

$$k_1 \Delta x_2 = (n - 2)m_1 g \quad (4),$$

для  $(n - i)$  звеньев –

$$k_1 \Delta x_i = (n - i)m_1 g \quad (5),$$

для нижнего n-го звена –

$$k_1 \Delta x_{n-1} = m_1 g \quad (6).$$

Нижнее n-ое звено не деформируется.

Подставляя уравнения (3), (4), (5), (6), в (2) получим:

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \dots + n - 1) \quad (7).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$  – сумма  $(n - 1)$  первых членов арифметической прогрессии

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (8).$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g n(n - 1)}{2k_1} \quad (9).$$

$$l = 10 \cdot 5,00 \text{ см} + 4,50 \text{ см} = 54,5 \text{ см} .$$

1.2. Согласно условию

$$\Delta x = nl_1 \quad (10).$$

Подставляя (10) в (9) получим:

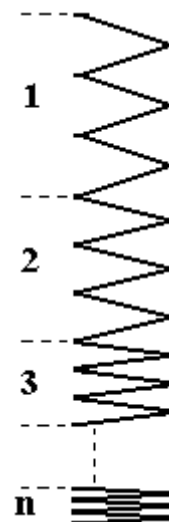


Рисунок 1.

$$nl_1 = \frac{m_1 gn(n-1)}{2k_1} \quad (11).$$

Откуда

### 2.1.

Выберем снизу пружины участок длиной  $x$  растяжением под действием собственного веса, которого можно пренебречь. Тогда

недеформированную пружину длиной  $l$  можно рассматривать как  $\frac{l}{x} = n$  пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \quad (13).$$

Деформацию первого сверху участка длиной  $x$  можно найти из условия равновесия оставшейся нижней части пружины (рис.3).

$$(m - m_1)g = k_1 \Delta x_1 \quad (14).$$

$$m_1 = \frac{x}{l} m \quad (15)$$

- масса участка пружины длиной  $x$ .  
Учитывая (13) и (15), уравнение (14) примет вид:

$$\left(m - \frac{x}{l} m\right)g = nk \Delta x_1 \quad (16).$$

Учитывая, что  $\frac{l}{x} = n$  получим:

$$\left(m - \frac{1}{n} m\right)g = nk \Delta x_1 \quad (17).$$

Откуда

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)mg}{n^2 k} \quad (18).$$

Деформация второго сверху участка находится аналогично:

$$(m - 2m_1)g = k_1 \Delta x_2 \quad (19).$$

$$\left(m - \frac{2x}{l} m\right)g = nk \Delta x_2 \quad (20).$$

$$\left(m - \frac{2}{n} m\right)g = nk \Delta x_2 \quad (21).$$

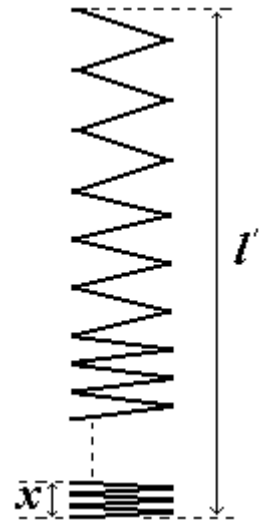


Рисунок 2.

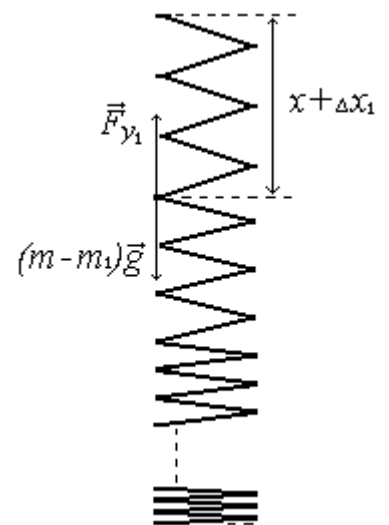


Рисунок 3.



$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)mg}{n^2k} \quad (22).$$

Для  $i$ -го участка

$$\Delta x_i = \frac{(n-i)mg}{n^2k} \quad (23).$$

Учитывая, что

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} \quad (2).$$

получим

$$\Delta x = \frac{mg}{n^2k} (1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{mg(n-1)}{2nk} \quad (24).$$

При  $n \rightarrow \infty$ , дробь  $\frac{(n-1)}{n} = 1$ , тогда

$$\Delta x = \frac{mg}{2k} \quad (25).$$

**2.2.** Так как по условию задачи  $\Delta x = l$ , то из (25) получим:

$$l = \frac{mg}{2k} \quad (26).$$

Откуда

$$k = \frac{mg}{2l} \quad (27).$$

**3.1.** При равномерном движении пружины по горизонтальной поверхности внешняя сила  $F$  равна силе трения действующей на пружину со стороны поверхности

Выберем возле свободного конца пружины участок длиной  $x$ , деформацией которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной  $l$

можно рассматривать как  $\frac{l}{x} = n$  пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \quad (13).$$

Для  $n$ -ой части пружины длиной  $x$ , находящейся слева, справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-1} = \mu \frac{x}{l} mg \quad (29).$$

Для  $(n-1)$ -ой и  $(n-2)$ -ой части пружины справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-2} = \mu \frac{2x}{l} mg \quad (30).$$

Для  $i$  частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_{n-i} = \mu \frac{ix}{l} mg \quad (31).$$

Для  $(n - 2)$  частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_2 = \mu \frac{(n - 2)x}{l} mg \quad (32).$$

Для  $(n - 1)$  частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_1 = \mu \frac{(n - 1)x}{l} mg \quad (33).$$

Для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2} \quad (34).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2} \quad (35).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{i\mu mg}{kn^2} \quad (36).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n - 2)\mu mg}{kn^2} \quad (38).$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n - 1)\mu mg}{kn^2} \quad (39).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{\mu mg(n - 1)}{2nk} \quad (40).$$

При  $n \rightarrow \infty$ , дробь  $\frac{(n - 1)}{n} = 1$ , тогда

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{2k} \quad (41).$$

**3.2.** Рассуждая аналогично п.3.1., из второго закона Ньютона для  $i$ -ой части пружины,  $n$ -ой и  $(n - 1)$ -ой части,  $i$  частей пружины, находящихся слева и т.д. для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (42).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (43).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{im(\mu g + a)}{kn^2} \quad (44).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n - 2)m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (45).$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n - 1)m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (46).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)(n - 1)}{2nk} \quad (47).$$

При  $n \rightarrow \infty$ , дробь  $\frac{(n - 1)}{n} = 1$ , тогда

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (48).$$

**3.3.** Так как по условию задачи  $\Delta x = l$ , то из (25) получим:

$$l = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (49).$$

Откуда

$$a = \frac{2kl - \mu mg}{m} \quad (50).$$

Из второго закона Ньютона, записанного для всей пружины, получим:

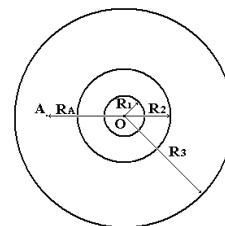
$$F = ma + \mu mg \quad (51).$$

Подставляя (50) в (51), получим:

$$F = 2kl \quad (52).$$

## Задача 11-2 . Звуковые волны, эффект Доплера.

1.1. Потенциал на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции потенциалов. Потенциал каждой из сфер будет определяться не только зарядом данной сферы, но и зарядами двух других сфер.



Потенциал на внешней поверхности первой сферы:

$$\varphi_1 = k \frac{q}{R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{10}{4} k \frac{q}{R} \quad (1)$$

Потенциал на внешней поверхности второй сферы:

$$\varphi_2 = k \frac{q}{2R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = 2k \frac{q}{R} \quad (2)$$

Потенциал на внешней поверхности третьей сферы:

$$\varphi_3 = k \frac{q}{4R} + k \frac{4q}{4R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{3}{4} k \frac{q}{R} \quad (3)$$

Потенциал в точке А:

$$\varphi_A = k \frac{q}{3R} + k \frac{4q}{3R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{7}{6} k \frac{q}{R} \quad (4)$$

Напряжённости электрических полей на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции напряжённостей. Векторы напряжённостей электрических полей, создаваемых концентрическими сферами, будут направлены радиально к поверхностям сфер. Поэтому суммирование напряжённостей полей производится алгебраически. Также учитываем, что напряжённость электрического поля внутри сферы равна нулю.

Напряжённость на внешней поверхности первой сферы:

$$E_1 = k \frac{q}{R^2} \quad (5)$$

Напряжённость на внешней поверхности второй сферы:

$$E_2 = k \frac{q}{4R^2} + k \frac{4q}{4R^2} = \frac{5}{4} k \frac{q}{R^2} \quad (6)$$

Напряжённость на внешней поверхности третьей сферы:

$$E_3 = k \frac{q}{16R^2} + k \frac{4q}{16R^2} - k \frac{2q}{16R^2} = \frac{3}{16} k \frac{q}{R^2} \quad (7)$$

Напряжённость в точке А:

$$E_A = k \frac{q}{9R^2} + k \frac{4q}{9R^2} = \frac{5}{9} k \frac{q}{R^2} \quad (8)$$

1.2.

После соединения второй и третьей сфер проводником между ними происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными. Суммарный заряд этих двух сфер сохраняется.

$$\varphi_2 = \varphi_3 \quad (9)$$

$$q_2 + q_3 = q_2 + q_3 \quad (10)$$

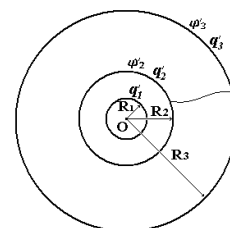


Рисунок 2.

$$q_2 + q_3 = 2q \quad (11)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q_1 = q_1 = q \quad (12)$$

Уравнение (9) запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2}{2R} + k \frac{q_3}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2}{4R} + k \frac{q_3}{4R} \quad (13)$$

Из (13) получим:

$$q_2 = -q \quad (14)$$

Из (11) получим:

$$q_3 = 3q \quad (15)$$

### 1.3.

После заземления второй и третьей сфер между ними и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными нулю.

$$\varphi_2' = \varphi_3' = 0 \quad (16)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q_1' = q_1 = q \quad (17)$$

По заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = q_2 + q_3 - q_2' - q_3' \quad (18)$$

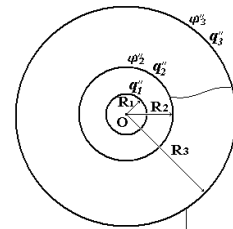


Рисунок 3.

Равенство потенциалов  $\varphi_2' = \varphi_3'$  запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (19)$$

Из (19) получим:

$$q_2' = -q \quad (20)$$

Учитывая, что  $\varphi_3' = 0$  получим:

$$q_3' = 0 \quad (21)$$

Следовательно, по заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = 3q \quad (22)$$

### 2.1.

Диэлектрический слой «заменяем» двумя сферами радиусами  $R$  и  $3R$ , и зарядами  $q_{c1}$  и  $q_{c2}$ . На рисунке 4 данные сферы обозначены пунктиром. Напряжённость электрического поля на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы можно определить как

$$E_D = k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} \quad (23),$$

или как

$$E_D = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (24)$$

Приравнявая правые части (23) и (24)

определим величину связанных зарядов,

образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы  $q_{c1}$ .

$$k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (25)$$

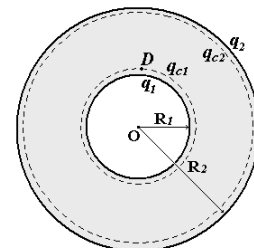


Рисунок 4.

$$q_{c1} = q \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (26)$$

Величину связанных зарядов, образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внешней сферы  $q_{c2}$ , определим используя закон сохранения электрического заряда.

Диэлектрический слой, согласно условия задачи, электрически нейтрален. Поэтому  $q_{c1} + q_{c2} = 0$  (27)

Подставляя в (27) значение  $q_{c1}$ , получим:

$$q_{c2} = q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (28)$$

## 2.2.

Потенциалы определяем по принципу суперпозиции потенциалов.

$$\varphi_R = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (29)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q_1}{2R} + k \frac{q_{c1}}{2R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (30)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q_1}{3R} + k \frac{q_{c1}}{3R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (31)$$

Подставляя значения зарядов  $q_1, q_2, q_{c1}, q_{c2}$ , получим:

$$\varphi_R = k \frac{q}{R} + k \frac{q}{R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(4\varepsilon + 2)}{3\varepsilon} \quad (32)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q}{2R} + k \frac{q}{2R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(8\varepsilon + 1)}{6\varepsilon} \quad (33)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q}{3R} + k \frac{q}{3R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{4}{3} \quad (34)$$

## 2.3.

После заземления внутренней сферы между ней и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциал этой сферы становятся равными нулю.

$$\varphi_1'' = 0 \quad (35)$$

Потенциал  $\varphi_1''$  запишем, используя принцип суперпозиции потенциалов:

$$k \frac{q_1''}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{3q}{3R} = 0 \quad (36)$$

Для напряжённости электрического поля в точке D получим уравнение

$$k \frac{q_1''}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q_1''}{\varepsilon R^2} \quad (37)$$

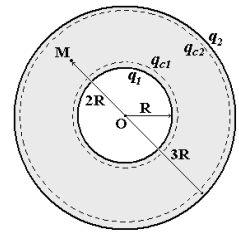


Рисунок 5.

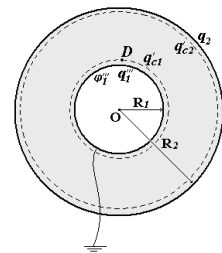


Рисунок 6.

Так же примем во внимание, что диэлектрический слой остаётся электрически нейтральным, а следовательно

$$q_{c1} + q_{c2} = 0 \quad (38).$$

Решив систему уравнений (36), (37) и (38), получим:

$$q_1'' = -q \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \quad (39)$$

$$q_{c1} = q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (40)$$

$$q_{c2} = -q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (41)$$

## Задача 11-3. Автоколебания

### Часть 1. Вал неподвижен, трения нет!

1.1 Период малых свободных колебаний стержня можно рассчитать по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,08}{9,8}} = 0,57c. \quad (1)$$

1.2 Закон движения стержня, то есть зависимость угла отклонения от времени  $\varphi(t)$ , есть закон гармонических колебаний

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t, \quad (2)$$

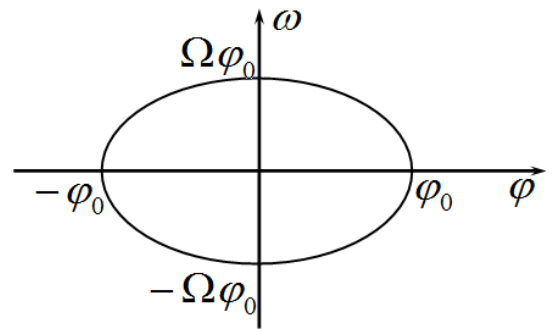
где  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  круговая частота колебаний стержня.

Зависимость угловой скорости движения стержня от времени  $\omega(t)$  имеет вид

$$\omega(t) = -\varphi_0 \Omega \sin \Omega t. \quad (3)$$

*Отклонение в  $30^\circ$  можно считать малым.*

1.3 Фазовая диаграмма движения стержня является эллипсом.



### Часть 2. Вал неподвижен, трение постоянно.

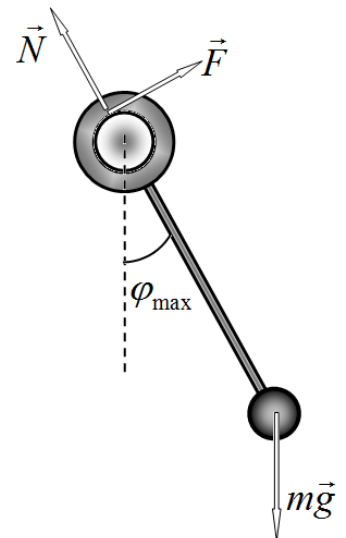
2.1 Из рисунка, на котором изображены силы, действующие на маятник следует:

$$N = mg \cos \varphi_{\max}. \quad (4)$$

Величина силы трения  $F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \varphi_{\max}$ .

В состоянии равновесия сумма моментов силы, действующих на маятник равна нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \mu_0 mg \cos \varphi_{\max} \cdot r &= mgl \sin \varphi_{\max} \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \varphi_{\max} &= \mu_0 \frac{r}{l} = 0,8 \frac{2,0}{8,0} = 0,20 \Rightarrow \varphi_{\max} \approx 11^\circ. \end{aligned} \quad (5)$$





2.2 Изменение энергии маятника равно работе силы трения, поэтому

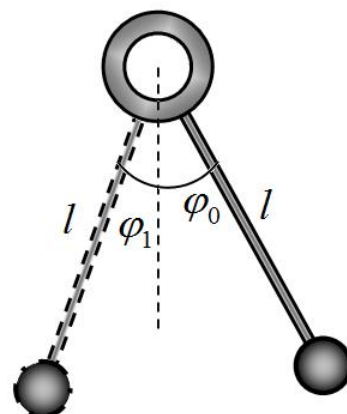
$$-mgl \cos \varphi_0 - (-mgl \cos \varphi_1) = \mu mgr(\varphi_0 + \varphi_1). \quad (6)$$

Полагая углы малыми и, пользуясь приближенной формулой для косинуса, получим

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 2\mu \frac{r}{l}(\varphi_0 + \varphi_1) \Rightarrow \quad (7)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - 2\mu \frac{r}{l}$$

То есть угол отклонения уменьшается на величину  $\Delta\varphi = 2\mu \frac{r}{l} = 2 \cdot 0,6 \frac{2}{8} = 0,30 = 17^\circ$ . Аналогичное уменьшение будет и до второй остановки.

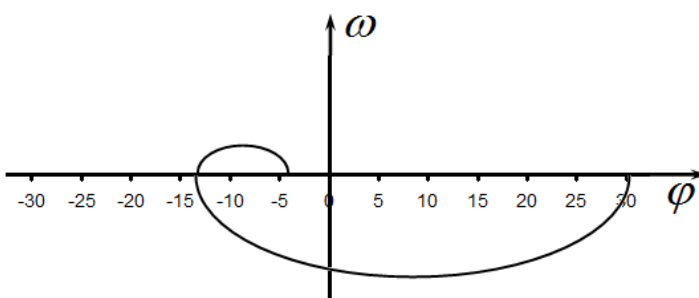


2.3 Итак первая остановка произойдет при

$$\varphi_1 = -(30^\circ - 17^\circ) = -13^\circ,$$

следующая остановка  $\varphi_2 = -4^\circ$

попадает в зону застоя, т.е. маятник остановится. Схематически фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рисунке.



### Часть 3. Вал вращается, трение есть!

3.1 Максимальный угол отклонения определяется трением покоя. Силы, действующие на маятник на вращающемся против часовой стрелки валу, показаны на рисунке. Угол  $\alpha$  задает направление на точку касания муфты и вала.

Запишем условия равновесия маятника.

В проекции на горизонтальную ось

$$N \sin \alpha = F \cos \alpha = \mu_0 N \cos \alpha \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_0. \quad (10)$$

В проекции на вертикаль:

$$mg = N \cos \alpha + \mu_0 N \sin \alpha \quad (11)$$

С учетом (10) последнее выражение преобразуется к виду

$$mg = N \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha N \sin \alpha \Rightarrow$$

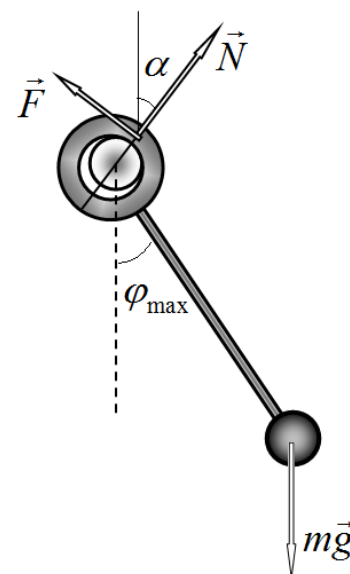
$$N = \frac{mg}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = mg \cos \alpha \quad (12)$$

Тогда сила трения описывается формулой (опять же, принимая во внимание формулу (10))

$$F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \alpha = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} mg. \quad (13)$$

Наконец, запишем условие равенства моментов сил, действующих на маятник

$$\frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} mgr = mgl \sin \varphi_{\max} \quad (14)$$



Из которого находим

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} \frac{r}{l} = 0,16 \quad (15)$$

$$\varphi_{\max} = 9,0^\circ$$

**3.2** Для расчета положения равновесия можно воспользоваться формулой (15), в которой заменить коэффициент трения покоя на коэффициент трения скольжения

$$\sin \bar{\varphi} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{r}{l} = 0,13 \quad (16)$$

$$\varphi_{\max} = 7,0^\circ$$

**3.3** Качественно процесс движения маятника будет происходить следующим образом.

Вначале маятник неподвижен относительно вала и поднимается с угловой скоростью  $\omega_0$ , равной скорости вращения вала (участок 1-2). Достигнув максимально возможной высоты, найденной в п. 3.1 он начнет проскальзывать (точка 2). Сила трения скачком уменьшается, маятник по инерции продолжает подниматься. Исчерпав запас кинетической энергии в некоторой точке 3, он остановится. Так как он не попадает в зону застоя, то начнет двигаться вниз (участок 3-4). На этом этапе его фазовая траектория совпадает с траекторией затухающих колебаний. Достигнув максимального отклонения в точке 4, он начнет двигаться в противоположном направлении, при этом его скорость будет возрастать. Когда его скорость достигнет значения  $\omega_0$ , опять «включится» сила трения покоя, под действием которой он будет подниматься. Далее процесс повторяется. Понятно, что подкачка энергии маятника происходит благодаря работе силе трения покоя на участке 1-2.

