Решения задач
9 класс

Задача 1.1 Плавление или кристаллизация?

Для плавления льда в данной системе нет источника теплоты. Теплота же, выделяющаяся при кристаллизации, может пойти на нагревание льда. Тепловое равновесие установится, когда температура льда достигнет нулевого значения. Поэтому уравнение теплового баланса имеет вид

$$\lambda \Delta m = c_л m_0 \Delta t \ . \qquad (1)$$

Из которого следует, что относительное изменения массы льда будет равно

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{c_л \Delta t}{\lambda} = \frac{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10}{330 \cdot 10^3} = 0{,}064 \ . \qquad (2)$$

Таким образом, масса льда увеличится на 4,6%.

Задача 1.2 Кто дальше?

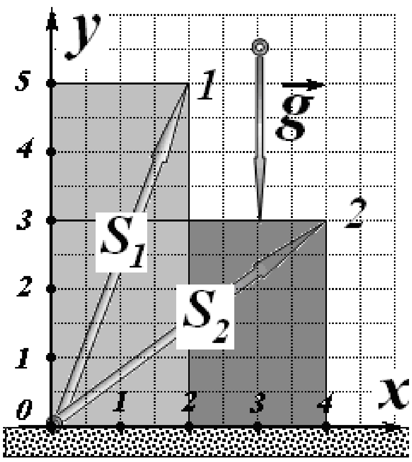
1. Дальность полета тела, брошенного с горизонтальной поверхности с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ под углом α к горизонту, вычисляется по хорошо известной формуле

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g} 2 \sin\alpha \cos\alpha \ . \qquad (1)$$

Поскольку скорости бросания камешков различаются и углы бросания обоих камешков близки к $\alpha = 45°$, то сказать «на глаз», кто улетит дальше невозможно. Действительно, у первого камешка несколько больше время полета, т.к. больше вертикальная проекция скорости υ_{1y}. Однако у второго камешка несколько больше горизонтальная скорость υ_{2y}! Нужно считать.

Для этого перепишем (1) в несколько необычном виде (для графического решения задачи), вспоминая, что $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$ и $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$

$$S = \frac{2}{g}(\upsilon_0 \sin\alpha)(\upsilon_0 \cos\alpha) = \frac{2}{g} \upsilon_{0x} \cdot \upsilon_{0y} \ . \qquad (2)$$



Согласно (2), дальность полёта тела прямо пропорциональна произведению проекций начальной скорости тела на координатные оси

$$S \sim \upsilon_{0x} \cdot \upsilon_{0y} \ , \qquad (3)$$

т.е. фактически площадям прямоугольников $S_1 = S_{0512}$ и $S_2 = S_{0324}$, выделенных на рисунке (образованы проекциями скоростей на координатные оси). Вычисляя отношение соответствующих площадей прямоугольников

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{12}{10} = 1{,}2 \qquad (4)$$

находим, что дальность полёта второго тела больше в $\eta = 1{,}2$

Задача 1.3 Сила тока и сила тяжести!?

1.3.1 Работа, совершаемая электродвигателем, производится за счет потребляемой энергии электрического тока. Поэтому механическая мощность, развиваемая двигателем, равна мощности электрического тока, потребляемого двигателем:

$$mgv = IU \quad \Rightarrow \quad I = \frac{mgv}{U} = 10A$$

1.3.2 При наличии сопротивления потребляемая электроэнергия расходует на совершение работы по подъему груза и выделяющуюся теплоту. Так как механическая мощность не изменилась, то потребляемая электрическая мощность должна возрасти. Следовательно, сила тока также возрастет.

Задача 9-2 Часы.

Часть 1. Угломерные шкалы.

1.1 Угол одного оборота равен $360°$, а также $12\,°час$ и $60\,°мин$. Поэтому

$$1°час = \frac{360°}{12} = 30° \tag{1}$$

$$1\,°мин = \frac{360°}{60} = 6° \tag{2}$$

1.2 Приравнивая угол одного оборота в обеих единицах, получим

$$60\,°мин = 12\,°час \quad \Rightarrow \quad 1°мин = \frac{12}{60}°час = \frac{1}{5}°час \tag{3}$$

1.3 За 1 час минутная стрелка поворачивается на полный оборот, т.е. на $12\,°час$, поэтому

$$\omega_m = 12\frac{°час}{час} \tag{4}$$

1.4 За 1 час (60 минут) часовая стрелка поворачивается на $1°час$ или, как следует из соотношения (3) на $5°мин$, поэтому

$$\omega_h = \frac{5°мин}{60мин} = \frac{1}{12}\frac{°мин}{мин} \tag{5}$$

Часть 2. Исправные часы.

2.1 Так как стрелки движутся равномерно, то углы их поворота (без «обнуления») описываются традиционными формулами, описывающими равномерное движение:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_h &= \omega_h t \\ \tilde{\varphi}_m &= \omega_m t \end{aligned} \tag{6}$$

Чтобы исключить полные обороты (провести «обнуление») удобно использовать функцию $y = \{x\}$ - дробная часть числа. С помощью этой функции можно провести «обнуление» любого угла (измеренного в $°час$):

$$\varphi = 12\left\{\frac{\varphi}{12}\right\}. \tag{7}$$

Тогда, с учетом численных значений угловых скоростей стрелок, можно записать

$$\begin{aligned} \varphi_h &= 12\left\{\frac{t}{12}\right\} \\ \varphi_m &= 12\{t\} \end{aligned} \tag{8}$$

2.2 Графики законов движения $\varphi_h(t)$ и $\varphi_m(t)$ за один оборот часовой стрелки (т.е. за 12 часов) показаны на рисунке

2.3 В заданном диапазоне времени, закон движения часовой стрелки записывается просто

$$\varphi_h = t \tag{8}$$

Для описания движения минутной стрелки удобней записать ее закон движения в течение каждого часа (начиная от часа n), который изображается наклонной прямой

$$\varphi_m = 12(t-n) \qquad t \in [n, n+1] \tag{9}$$

Для определения моментов времени, когда стрелки часов совпадают, необходимо решить уравнение

$$\varphi_m = \varphi_h \quad \Rightarrow \quad 12(t-n) = t \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{12}{11}n \tag{10}$$

Эти времена можно представить в виде $t_n = \frac{12}{11}n = n + \frac{n}{11}$. В этой записи: n - время встречи (часы), а величину $\frac{n}{11}$ следует перевести в минуты. Эта добавка времени в минутах будет равна $\Delta t = \frac{n}{11}\cdot 60$. Расчеты времен приведены в таблице.

n	Время встречи		n	Время встречи	
	часы	минуты		часы	минуты
0	0	0	6	6	33
1	1	5	7	7	38
2	2	11	8	8	44
3	3	16	9	9	49
4	4	22	10	10	55
5	5	27	11	12	0

Часть 3. Испорченные маятниковые часы.

3.1 Часы будут отставать, так как на некоторый угол (определяющий показания часов) они повернутся за большее время.

3.2 Показания часов пропорциональны числу периодов колебаний. Пусть период колебаний исправных часов равен T_0, тогда за время t показания часов будут

$$\hat{t}_0 = A\frac{t}{T_0} = t\,, \qquad (11)$$

где A - некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от устройства часов. Для исправных часов показания часов равны истинному времени.
За тот же промежуток истинного времени испорченные часы покажут

$$\hat{t} = A\frac{t}{T} = A\frac{t}{T_0(1+\eta)} = \frac{t}{1+\eta} \qquad (12)$$

Тогда ошибка в показаниях часов будет равна

$$\delta t = t - \hat{t} = t - \frac{t}{1+\eta} = \frac{\eta}{1+\eta}t \qquad (13)$$

Подставим численные значения и вычислим

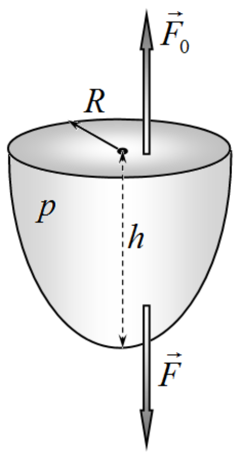
$$\delta t = \frac{\eta}{1+\eta}t = \frac{0{,}0100}{1+0{,}0100}24\cdot 3600 = 855\textit{с} \approx 14\textit{мин}\,. \qquad (14)$$

3.3 Часы покажут точное время, когда набежит ошибка в 12 часов.
Из формулы (13) находим

$$\delta t = \frac{\eta}{1+\eta}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1+\eta}{\eta}\delta t = \frac{1{,}0100}{0{,}0100}12 = 1212\textit{час} \approx 50\textit{дней}\,. \qquad (15)$$

Задача 9-3. Все о давлении!

Часть 1. Сила давления на кривую стенку.

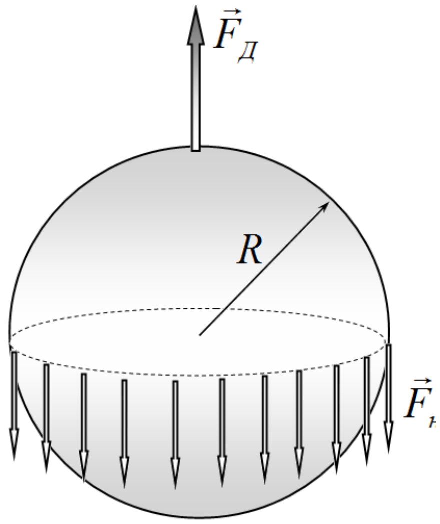


Газ изнутри не может сдвинуть сосуд, следовательно, суммарная сила давления, действующая на внутреннюю поверхность сосуда равна нулю (конечно, имеется в виду векторная сумма сил давления на все стенки сосуда). Сила давления на плоскую крышку равна

$$F_0 = pS = \pi R^2 p \qquad (1)$$

и направлена перпендикулярно плоскости крышки. Следовательно, сила давления на стенки направлена в противоположную сторону (но также перпендикулярно крышке). Ее модуль также определяется по формуле (2).

Часть 2. Натяжение воздушного шарика.



Пленка шарика находится в равновесии. Поэтому векторная сумма сил, действующих на любую часть пленки, равна нулю.

Рассмотрим верхнюю половину сферической пленки шарика (см. рис.). Разность сил давлений газ изнутри и наружного воздуха, направлена вертикально вверх и по модулю равна

$$F_Д = \pi R^2 (p - p_0). \tag{1}$$

Эта сила уравновешивается силами натяжения пленки, действующими вдоль «экватора», которая равна

$$F_Н = \sigma l = 2\pi R\sigma . \tag{2}$$

Из равенства этих сил следует

$$\pi R^2 (p - p_0) = 2\pi R\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{R(p - p_0)}{2}. \tag{3}$$

Часть 3. Магдебургские полушария.

3.1 Сила, которую должны приложить к полушариям, по модулю равна силе атмосферного давления, действующую на одно полушарие.
Эта сила вычисляется по формуле, которую уже дважды использовали при решении этой задачи

$$F = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi \cdot 0{,}355^2}{4} 1{,}0 \cdot 10^5 = 9{,}9 \cdot 10^4 \, H . \tag{4}$$

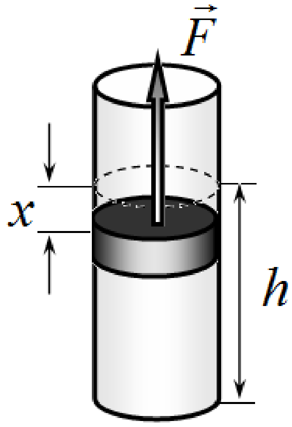
3.2 Эту силу следует разделить на восемь (а не на шестнадцать!) лошадей, следовательно, сила, приходящаяся на одну лошадь равна

$$F_1 \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \, H \tag{5}$$

10 класс

Задание 10-1 Разминка.

Часть 1. Газовая пружина.



1.1 При уменьшении объема газа возрастает его давление, что и приводит к появлению возвращающей силы, которую можно представить в виде

$$F = \Delta PS \qquad (1)$$

Так как все процессы происходят при постоянной температуре, то для газа под поршнем справедливо уравнение (закон Бойля)

$$P_0 h = (P_0 + \Delta P)(h - x) \qquad (2)$$

Из этого уравнения следует, что относительное изменение давления связано с относительным изменением объема простым соотношением

$$\left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right)\left(1 + \frac{x}{h}\right) = 1 \qquad (3)$$

Так как эти изменения малы, то после раскрытия скобок можно пренебречь произведением относительных изменений, тогда из уравнения (3) следует, что

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{x}{h}. \qquad (4)$$

Теперь уравнение (1) можно записать в виде, формально совпадающим с законом Гука:

$$F = \Delta PS = -\frac{P_0 S}{h} x. \qquad (5)$$

Таким образом, коэффициент упругости газа равен

$$k = \frac{P_0 S}{h}. \qquad (6)$$

1.2 Перепишем еще раз выражение (5):

$$\frac{F}{S} = -P_0 \frac{x}{h} \qquad (7)$$

И сравним его с законом Гука для деформации сжатии твердых тел

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad (8)$$

Где σ - механическое напряжение, ε - относительная деформация, E - модуль Юнга твердого вещества.

Опять наблюдается полная аналогия, которая позволяет утверждать, что модулем Юнга для газа при изотермическом процессе является его давление!

Часть 2. Ледяной двигатель.

Максимальная работа при заданных температурах нагревателя (которым в данном случае является водяной пар при температуре $T_1 = 373K$) и холодильника (в роли которого может выступать лед при температуре $T_2 = 273K$) совершается идеальной машиной, работающей по циклу Карно. Для цикла Карно справедливо соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \qquad (1)$$

Где Q_1 - теплота, полученная от нагревателя, Q_2 - теплота, отданная холодильнику. Рассчитаем численные значения этих величин (так называемых приведенных теплот)

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Lm}{T_1} = \frac{2{,}2 \cdot 10^6}{373} = 5{,}9 \cdot 10^3 \, \frac{Дж}{К}$$
$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_1} = \frac{0{,}33 \cdot 10^6}{273} = 1{,}2 \cdot 10^3 \, \frac{Дж}{К} \qquad (2)$$

Расчет показывает, что сначала расплавится весь лед (машине «не хватает» холода!), поэтому ответ следует выражать через теплоту Q_2.

Работа, совершенная двигателем, может быть выражена через КПД

$$A = \eta Q_1 = \frac{\Delta T}{T_1} Q_1 = \Delta T \frac{Q_2}{T_2}, \qquad (3)$$

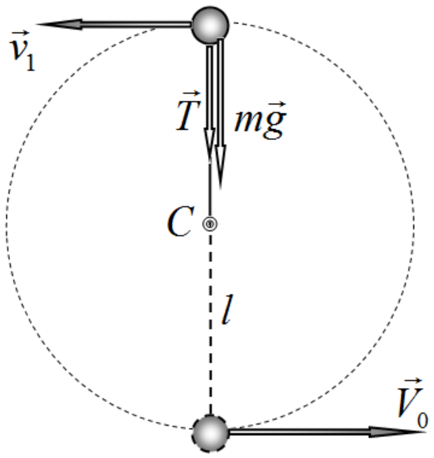
Где $\Delta T = 100\,K$ - разность температур нагревателя и холодильника.

Подстановка численных значений дает требуемый результат

$$A = \eta Q_1 = \frac{\Delta T}{T_1} Q_1 = \Delta T \frac{Q_2}{T_2} = 1{,}2 \cdot 10^5 \, Дж \approx 0{,}033 кВт \cdot час\,. \qquad (4)$$

Задача 10-2. Шарик на нити.

Часть 1. Полный оборот.



1.1 Чтобы шарик сделал полный оборот мало, чтобы он поднялся в верхнюю точку траектории. Необходимо, чтобы в верхней точке шарик имел скорость v_1 достаточную для того, чтобы нить оставалась натянутой, т.е. сила натяжения $\vec{T}$ должна быть чуть больше нуля.

Для определения этой скорости запишем уравнение второго закона Ньютона для шарика в верхней точке в проекции на вертикальную ось:

$$m\frac{v_1^2}{l} = mg + T\,, \qquad (1)$$

Здесь $\frac{v_1^2}{l}$ - центростремительное ускорение шарика.

Из уравнения (1) следует, что эта скорость должна удовлетворять условию

$$T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 \geq gl\,. \qquad (2)$$

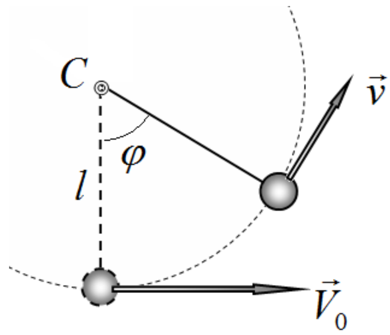
Чтобы найти скорость в нижней точке можно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + 2mgl = \frac{mV_0^2}{2}\,. \qquad (3)$$

Из этого уравнения следует (с учетом соотношения (2)), что минимальная скорость равна

$$V_0^2 = v_1^2 + 4gl = 5gl \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{5gl}\,. \qquad (4)$$

1.2 Для расчета времени одного оборота найдем зависимость модуля скорости шарика от угла отклонения от вертикали φ. Для этого опять воспользуемся законом сохранения энергии:



$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = \frac{mV_0^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{gl(7-2\cos\varphi)} \tag{4}$$

Скорость сложным образом зависит от его координаты. Поэтому приближенный расчет времени движения может быть проведен численно. Для этого необходимо вычислить сумму

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k}. \tag{5}$$

Для строгого расчета необходимо устремить шаг $\Delta\varphi$ к нулю, в этом случае сумма перейдет в соответствующий интеграл. Однако этот интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому все равно должен вычисляться численно.

Подставим выражение для скорости (4) в формулу для периода вращения (5)

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k} = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{\sqrt{gl(7-2\cos\varphi_k)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sum_k \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{(7-2\cos\varphi_k)}} = C\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{6}$$

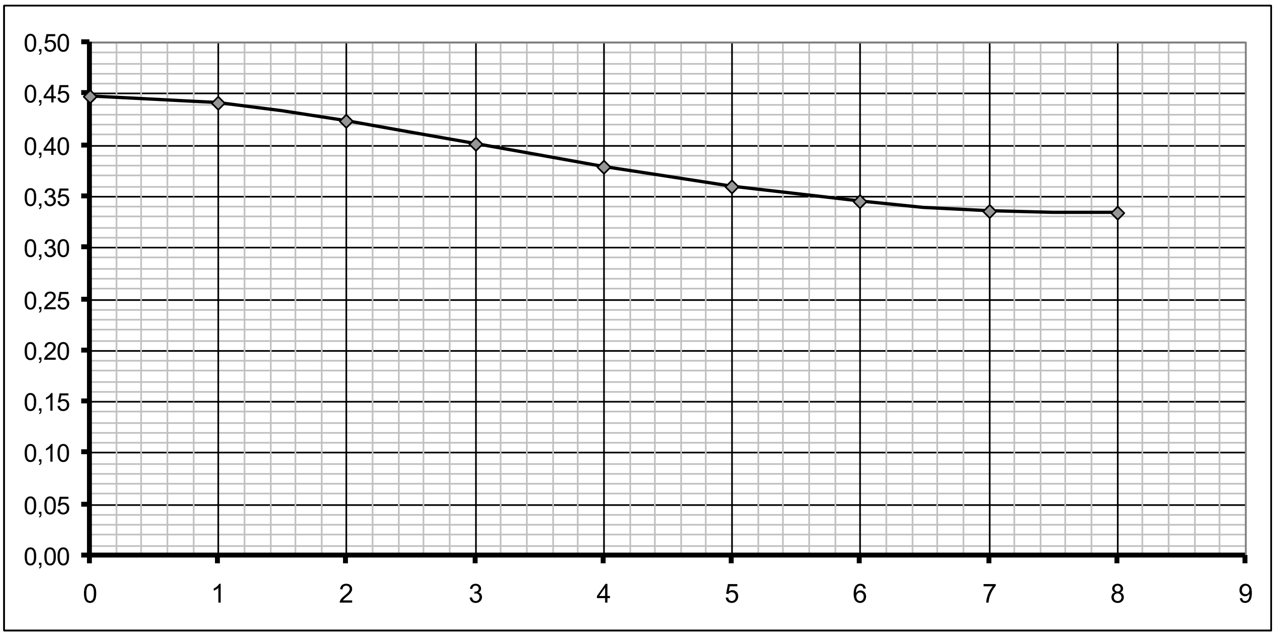
Так как время подъема равно времени опускания шарика равны, то для ускорения расчета достаточно вычислить сумму для угла φ в пределах от 0 до π.

Построим «по точкам» график функции $f(\varphi_k) = \dfrac{1}{\sqrt{(7-2\cos\varphi_k)}}$ с шагом $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{8}$.

Таблица значений функции $f(\varphi_k)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_k	$0\cdot\frac{\pi}{8}$	$1\cdot\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	$4\cdot\frac{\pi}{8}$	$5\cdot\frac{\pi}{8}$	$6\cdot\frac{\pi}{8}$	$7\cdot\frac{\pi}{8}$	$8\cdot\frac{\pi}{8}$
f_k	0,447	0,441	0,423	0,400	0,378	0,359	0,345	0,336	0,333

Ниже показан график этой функции.



Функция изменяется достаточно медленно, поэтому расчет по 8 рассчитанным точкам должен дать результат с хорошей точностью.

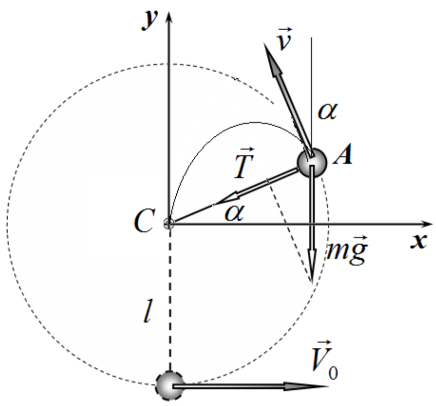
Проведенное численное суммирование по этим точкам привело к результату $C = 2{,}413$.

Если считать, что движение является равноускоренным (то есть просуммировать по двум крайним точкам), то получается значение $C = 2{,}45$ - различие меньше 5%. Поэтому окончательно формула для времени одного оборота следующая

$$T \approx 2{,}41\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{7}$$

Часть 2. Попадание в точку подвеса.

2.1 Если начальная скорость шарика не достаточна для того, чтобы шарик достиг верхней точки, то сначала он будет двигаться по дуге окружности радиуса l (на этом участке нить подвеса натянута). Когда сила натяжения нити стане равной нулю, нить изогнется, а шарик дальше будет двигаться по параболе.



Пусть сила натяжения нити стала равной нулю в некоторой точке A (см. рис.), положение которой будем задавать углом наклона нити к горизонту α. На основании 2 закона Ньютона для шарика, находящегося в точке A, можно записать уравнение

$$\frac{mv^2}{l} = T + mg\sin\alpha \tag{8}$$

Так как в этой точке сила натяжения равна нулю, то скорость v в этой точке связана с углом α следующим соотношением

$$v^2 = gl\sin\alpha \tag{9}$$

Второе уравнение, связывающее эти параметры, следует из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1+\sin\alpha) = \frac{mV_0^2}{2} \quad \Rightarrow$$
$$V_0^2 = v^2 + 2gl(1+\sin\alpha) \tag{10}$$

Введем систему координат, как показано на рисунке. Запишем закон движения шарика после точки A, при движении по параболе в поле тяжести земли. (с учетом координат начальной точки A и проекций скорости):

$$\begin{cases} x = l\cos\alpha - (v\sin\alpha)\cdot t \\ y = l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\cdot t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}. \tag{11}$$

Уравнения (9)-(11) позволяют полностью описать движение шарика.

Пусть шарик попадает в точку подвеса в некоторый момент времени t_1, в этот момент времени $x = 0,\ y = 0$, поэтому из закона движения (11) следует

$$x = l\cos\alpha - (v\sin\alpha)\cdot t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}$$

$$y = l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\cdot t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{l}{\sin\alpha} - \frac{gl^2}{2v^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

(12)

Подставим выражение (9) для квадрата скорости и получим уравнение для угла α

$$\frac{l}{\sin\alpha} - \frac{gl^2}{2gl\sin\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1. \qquad (13)$$

Решая это уравнение, получим единственное значения угла α:

$$\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad . \qquad (14)$$

Теперь с помощью уравнений (9)-(10) не сложно найти требуемую начальную скорость

$$V_0^2 = v^2 + 2gl(1+\sin\alpha) = gl\sin\alpha + 2gl(1+\sin\alpha) = gl(2+3\sin\alpha) = gl\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad (15)$$

Окончательный ответ этой части задачи:

$$V_0 = \sqrt{gl\left(2+\sqrt{3}\right)}. \qquad (16)$$

Часть 3. Попадание в точку старта.

В этом случае характер движения и уравнения (9)-(11), его описывающие, такие же, как в предыдущей части. Только в этом случае надо задать другие конечные условия.
Пусть шарик попадает в начальную точку в некоторый момент времени t_2, в этот момент времени $x = 0,\ y = -l$, поэтому уравнение для определения угла α несколько изменится

$$x = l\cos\alpha - (v\sin\alpha)\cdot t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}$$

$$y = l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\cdot t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = -l \quad \Rightarrow \quad l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}\right)^2 = -l \quad \Rightarrow$$

$$\frac{l}{\sin\alpha} - \frac{gl^2}{2v^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -l$$

(17)

После подстановки выражения (9) получим

$$\frac{l}{\sin\alpha} - \frac{gl^2}{2gl\sin\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -l \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \sin^3\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

(18)

$$\sin^3\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

Формально мы получили кубическое уравнение относительно величины $z = \sin\alpha$:

$$2z^3 + 3z^2 - 1 = 0. \qquad (19)$$

Не сложно найти один из корней этого уравнения $z = -1$, что позволяет преобразовать к виду

$$2z^3 + 3z^2 - 1 = 2z^3 + 2z^2 + z^2 - 1 = 2z^2(z+1) + (z+1)(z-1) = (z+1)\left(2z^2 + z - 1\right) = 0$$

Корень этого уравнения $z = -1$ не является решением системы уравнений. Так при этом значении синуса угла не выполняется уравнение (9). Тогда оставшиеся корни являются корнями квадратного уравнения

$$2z^2 + z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$
$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = -1 \qquad (20)$$

Таким образом, единственным корнем системы уравнений является значение

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}. \qquad (21)$$

Наконец, с помощью выражения (15) находим требуемую начальную скорость

$$V_0 = \sqrt{gl(2 + 3\sin\alpha)} = \sqrt{\frac{7}{2}gl} \qquad (22)$$

Задание 10-3 Давление на глубине.

Часть 1.

1.1 Давление описывается известной формулой

$$P = \rho g h \qquad (1)$$

Часть 2.

2.1 Сила взаимодействия определяется законом всемирного тяготения И. Ньютона

$$f_0 = G\frac{m^2}{D^2}. \qquad (2)$$

2.2 Сила взаимодействия между нулевым и k-тым шариками равна

$$f_k = G\frac{m^2}{(kD)^2} = \frac{1}{k^2} f_0. \qquad (3)$$

При $k \to \infty$ сила взаимодействия стремится к нулю $f_\infty = 0$.

2.3 Так как для гравитационных сил справедлив принцип суперпозиции. То сила, действующая на крайний шарик, равна сумме сил, действующих со стороны всех шариков

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = f_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \qquad (4)$$

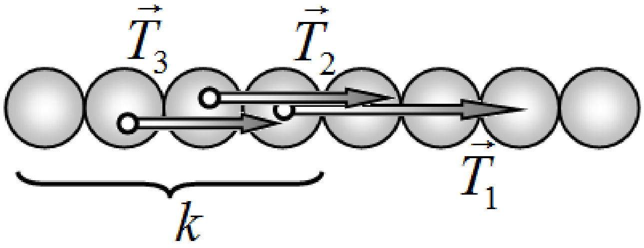
Для численного расчета удобно провести последовательное суммирование по рекуррентной формуле

$$\frac{F_k}{f_0} = \frac{F_{k-1}}{f_0} + \frac{f_k}{f_0}. \qquad (5)$$

При $k \to \infty$ сила взаимодействия стремится к предельному значению

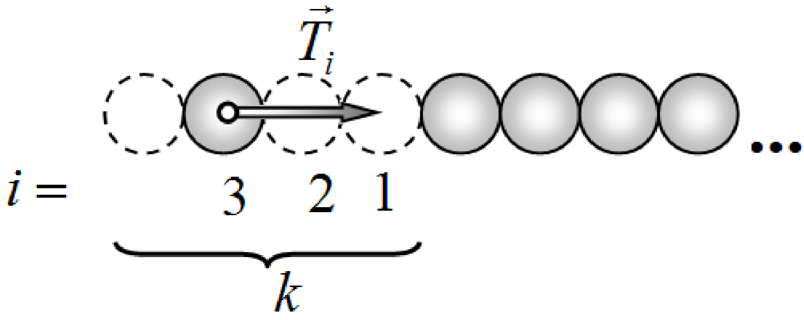
$$F_\infty = f_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = f_0 \frac{\pi^2}{6}. \qquad (6)$$

2.4 Рассмотрим первых k шариков. Так как они находятся в равновесии, то сила упругого взаимодействия между k-тым и предыдущим шариком равна силе гравитационного взаимодействия первых k шариков с полубесконечной цепочкой



$$P_k = T_1 + T_2 + ...T_k \ , \tag{7}$$

Здесь T_i ($i = 1,2...k$) сила притяжения шарика номер i с полубесконечной цепочкой. Нумерацию по i удобно вести в обратном направлении.



Очевидно, что

$$\begin{aligned} T_1 &= F_\infty \\ T_2 &= F_\infty - F_1 \\ T_3 &= F_\infty - F_2 \\ &... \\ T_i &= F_\infty - F_{i-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 1, в которой добавлена строка для расчета сил T_k.

2.4 Запишем в явном виде выражение для силы P_k при больших k, используя непосредственно закон всемирного тяготения

$$\begin{aligned} \frac{P_k}{f_0} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ ... \end{aligned} \tag{9}$$

Из этой записи следует, при очень больших k данное отношение ведет себя так же, как гармонический ряд, т.е.

$$\frac{P_k}{f_0} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \ . \tag{10}$$

Известно, что сумма такого ряда стремится к бесконечности, причем так же, как $\ln k$, иными словами

$$P_k \approx f_0 \ln k \ . \tag{11}$$

Таблица 1. Результаты расчетов.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞

$\frac{f_k}{f_0}$	1,000	0,250	0,111	0,063	0,040	0,028	0,020	0,016	0,012	0,010	0
$\frac{F_k}{f_0}$	1,000	1,250	1,361	1,424	1,464	1,491	1,512	1,527	1,540	1,550	1,645
$\frac{T_k}{f_0}$	1,645	0,645	0,395	0,284	0,221	0,181	0,154	0,133	0,118	0,105	0
$\frac{P_k}{f_0}$	1,645	2,290	2,685	2,969	3,190	3,371	3,525	3,658	3,775	3,881	$\ln k$

11 класс

Задание 11-1. Оцените!

1.1. Сила давления воздуха есть сила Архимеда! Следовательно, она описывается формулой

$F = \rho_{воздуха} gV$ (где V - объем тела человека). Так как средняя плотность человека примерно равна плотности воды, то $V = \frac{m}{\rho_{воды}}$. Поэтому

$$F = \frac{\rho_{воздуха}}{\rho_{воды}} mg \approx \frac{1{,}2}{1000} 100 \cdot 10 \approx 1H \qquad (1)$$

1.2 Если на пути фотона попадется капелька воды, то фотон будет рассеян или поглощен. Для оценки средней длины «пролета» фотона можно провести следующее рассуждение: в цилиндре диаметра, равном диаметру капельки и длины равной длине свободного пролета в среднем должна находится одна капелька, т.е.

$$l\frac{\pi d^2}{4} n \approx 1 \quad \Rightarrow \quad n \approx \frac{4}{\pi d^2 l} = \frac{4}{\pi \left(10^{-6}\right)^2 100} \approx 10^{10}\, м^{-3}. \qquad (1)$$

1.3 Разумно предположить (а это так и есть на самом деле), что отклонение показателя преломления от 1 пропорционально концентрации молекул воздуха (обозначим γ, чтобы не путать с показателем преломления n), т.е.

$$n = 1 + \alpha\gamma. \qquad (1)$$

Концентрацию можно выразить через абсолютную температуру с помощью уравнения состояния $p = \gamma kT$, поэтому зависимость показателя преломления от температуры имеет вид

$$n = 1 + \frac{\beta}{T}, \qquad (2)$$

Где β - постоянная величина (при постоянном давлении).

Так изменение температуры не велико, то для изменения показателя преломления можно записать

$$\delta n \approx -\frac{\beta}{T_0}\frac{\Delta t}{T_0} = -(n_0 - 1)\frac{\Delta t}{T_0} \approx -3 \cdot 10^{-4}\frac{10}{300} \approx -10^{-5}. \qquad (3)$$

Задача 11-2 Собственные колебания.

Часть 1. Один движущийся шарик.

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -\gamma x \tag{1}$$

Где x - смещение шарика от положения равновесия, a - его ускорение.
Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\,. \tag{2}$$

Часть 2. Два движущихся шарика.

2.1 Уравнения движения шариков следуют из второго закона Ньютона и закона Гука

$$\begin{aligned} ma_1 &= -\gamma x_1 + \gamma(x_2 - x_1) \\ ma_2 &= -\gamma(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Или

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ a_2 &= \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \end{aligned}. \tag{4}$$

Чтобы найти частоты собственных колебаний представим решение уравнений (4) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos\omega t \\ x_2 &= A_2 \cos\omega t \end{aligned}. \tag{5}$$

Где A_1, A_2 - амплитуды колебаний первого и второго шариков. Подстановка функций (5) в уравнения (4) дает уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 &= -2\omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 \\ -\omega^2 A_2 &= \omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Выразим из обоих уравнений (6) отношение амплитуд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \tag{7}$$

Чтобы система уравнений (6) была совместна необходимо, чтобы найденные отношения (7) были равны, что дает уравнение для определения собственных частот колебаний

$$\frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2-z} = 1 - z\,. \tag{8}$$

Здесь обозначено $z = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Решая это уравнение, получим

$$\begin{aligned} &(2-z)(1-z) = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 3z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \\ &z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad z_{21} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, собственные частоты собственных колебаний данной системы равны

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,. \tag{10}$$

Отношения амплитуд колебаний шариков при этих колебаниях будут соответственно равны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 1 - z; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{11}$$

Часть 3. Длинная цепочка.

3.1 Уравнение движения произвольного шарика имеет вид

$$ma_k = \gamma(x_{k+1} - x_k) - \gamma(x_k - x_{k-1}). \tag{12}$$

Или

$$a_k = \omega_0^2(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}). \tag{13}$$

Для $k = 0$ следует положить $x_0 = 0$. Для крайнего шарика можно отбросить первое слагаемое в уравнении (12). Но проще и красивее распространить уравнение (13) на фиктивный $(N+1)$ шарик, причем считать, что $x_{N+1} = x_N$.

3.2 Последуем по пути, подсказанному «гуманитарной помощью».

Подставим пробное решение $x_k = A_k \cos\omega t$ в уравнение (13). После сокращения получим уравнение для амплитуд

$$-\omega^2 A_k = \omega_0^2(A_{k+1} - 2A_k + A_{k-1}), \tag{14}$$

Которое перепишем в симметричном виде

$$A_{k+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_k + A_{k-1} = 0. \tag{15}$$

Теперь подставим пробное решение для этого уравнения $A_k = A\sin(k\varphi)$.

Обоснование такого предсказания заключается в том, что фактически свободные колебания являются стоячими волнами на цепочке. Кроме того, синус выбран, чтобы удовлетворить условию $x_0 = 0$.

Указанная подстановка дает:

$$\sin((k+1)\varphi) + \sin((k-1)\varphi) = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi). \tag{16}$$

Используя известную тригонометрическую формулу для суммы синусов, получим

$$\begin{gathered} 2\sin\frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2}\cos\frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2} = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi) \\ 2\sin(k\varphi)\cos\varphi = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi) \\ \cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \end{gathered}. \tag{17}$$

Теперь подставим пробное решение во второе граничное условие $x_{N+1} = x_N$ и преобразуем его

$$\begin{gathered} \sin((N+1)\varphi) = \sin(N\varphi) \;\Rightarrow\; \sin((N+1)\varphi) - \sin(N\varphi) = 0 \;\Rightarrow \\ 2\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \;\Rightarrow \end{gathered}. \tag{18}$$

Так $\cos\frac{\varphi}{2}$ отличен от нуля (иначе цепочка не колеблется!), то

$$\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) = 0 \;\Rightarrow\; (2N+1)\varphi_j = 2\pi j \quad (j = 1,2,3...) \tag{19}$$

Итак, параметр φ может принимать только дискретный ряд значений

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{2N+1} j \tag{20}$$

Наконец, с помощью формулы (17) находим частоты собственных колебаний

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_j = 2\omega_0 \sin\frac{\varphi_j}{2},$$

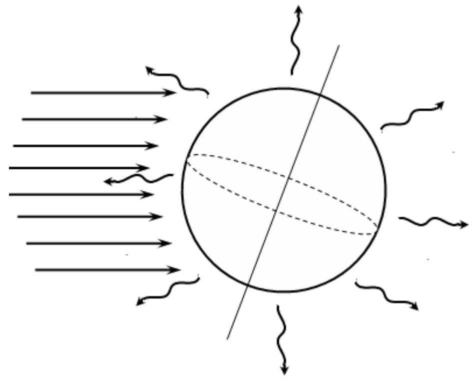
После подстановки выражения (20), получаем окончательную формулу для частот колебаний

$$\omega_j = 2\omega_0 \sin\frac{\varphi_j}{2} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2N+1} j\right) \tag{21}$$

В этой формуле j изменяется в пределах от 1 до N, т.к. дальнейшее увеличение этого параметра приведет к повторению частот. Поэтому число собственных частот равно числу подвижных шариков, т.е. N

Задача 11-3 Почему январь холоднее декабря?

Часть 1. Средняя температура.



Необходимо использовать условие теплового баланса: количество энергии, поступающей от Солнца, равно энергии, испускаемой Землей. Только необходимо учесть, что энергия от Солнца поступает с одной стороны, а Землей излучается во все стороны. С учетом этого обстоятельства получим уравнение

$$q_0 \cdot \left(\pi R^2\right) = \sigma T^4 \cdot \left(4\pi R^2\right) \tag{1}$$

Из которого следует, что средняя температура оценивается выражением

$$\overline{T} = \sqrt[4]{\frac{q_0}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1{,}4 \cdot 10^3}{4 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}}} \approx 280K \tag{2}$$

Часть 2. Лирическое отступление.

2.1 Для того, чтобы найти время задержки необходимо найти закон изменения скорости тела со временем. Для этого надо использовать уравнение второго закона Ньютона

$$ma = F_0 \cos\omega t - \beta v \tag{3}$$

Чтобы уменьшить число параметров перепишем это уравнение в виде

$$a + \gamma v = f_0 \cos\omega t, \tag{4}$$

Где обозначено $\gamma = \dfrac{\beta}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$. Теперь воспользуемся подсказкой. Зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 \cos\omega(t - \tau), \tag{5}$$

которую при $\omega\tau << 1$ можно упростить, используя приближенные формулы $\sin\omega\tau \approx \omega\tau, \cos\omega\tau \approx 1$:

$$\begin{aligned} v &= v_0 \cos\omega(t-\tau) = v_0 \cos(\omega t - \omega\tau) = v_0\left(\cos\omega t \cdot \cos\omega\tau + \sin\omega t \cdot \sin\omega\tau\right) \approx \\ &\approx v_0\left(\cos\omega t + \omega\tau \sin\omega t\right) \end{aligned}. \tag{6}$$

В этом же приближении ускорение тела описывается функцией

$$a = \omega v_0\left(-\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t\right). \tag{7}$$

Подставим выражения для скорости и ускорения в уравнение (4):

$$\omega v_0\left(-\sin\omega t+\omega\tau\cos\omega t\right)+\gamma v_0\left(\cos\omega t+\omega\tau\sin\omega t\right)= f_0\cos\omega t\,. \tag{8}$$

Чтобы это равенство выполнялось в любой момент времени, необходимо выполнение условий (приравниваем коэффициент при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$):

$$\begin{gathered}-\omega+\gamma\cdot\omega\tau=0\\ \left(\omega^2\tau+\gamma\right)v_0 = f_0\end{gathered}\,. \tag{9}$$

Из этих формул находим требуемые величины

Время задержки

$$\tau=\frac{1}{\gamma}=\frac{m}{\beta}, \tag{10}$$

Амплитуда скорости (с учетом $\omega\tau << 1$)

$$v_0 = \frac{f_0}{\omega^2\tau+\gamma}=\frac{f_0}{\omega^2\tau+\frac{1}{\tau}}=\tau\, f_0 = \frac{f_0}{\gamma}=\frac{F_0}{\beta}\,. \tag{11}$$

<u>Дополнение для скептиков</u>. Не трудно найти и точное решение (4).

Если зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v=v_0\cos\omega\left(t-\tau\right),$$

То ускорение меняется со временем по закону

$$a=-v_0\omega\sin\omega\left(t-\tau\right).$$

Подставим эти выражения в уравнение движения:

$$\gamma v_0\cos\omega\left(t-\tau\right)-v_0\omega\sin\omega\left(t-\tau\right)= f_0\cos\omega t\,.$$

Левую часть этого уравнения преобразуем традиционным способом

$$\begin{aligned}&v_0\cos\omega\left(t-\tau\right)-v_0\omega\sin\omega\left(t-\tau\right)=\\ &=v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}\cos\omega\left(t-\tau\right)-\frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}\sin\omega\left(t-\tau\right)\right)=\\ &=v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2}\cos\left(\omega\left(t-\tau\right)+\varphi\right)\end{aligned}$$

Где сдвиг фаз определяется, как $\varphi = arctg\dfrac{\omega}{\gamma}$. *Чтобы уравнение (7) обращалось в верное тождество при любом* t, *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{gathered}\varphi-\omega\tau=0\\ v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2} = f_0\end{gathered}\,.$$

Откуда следует, что амплитуда изменения скорости частицы равна

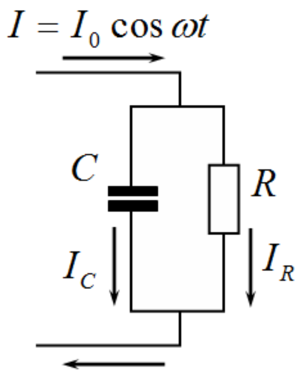
$$v_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{\beta^2+\left(m\omega\right)^2}}\,.$$

А время задержки между максимумом силы и максимумом скорости равно

$$\tau=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{1}{\omega}arctg\frac{\omega}{\gamma}=\frac{1}{\omega}arctg\frac{m\omega}{\beta}\,.$$

Полагая $\omega\tau << 1$, *получим выведенные ранее приближенные формулы.*

2.2 Конденсатор с утечкой можно представить, как параллельно соединенные резистор и конденсатор (см. рисунок).



В этой цепи суммарная сила тока равна сумме сил токов через резистор и конденсатор:

$$I = I_R + I_C . \quad (12)$$

Сила тока через резистор подчиняется закону Ома

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{q}{CR}, \quad (13)$$

где $U = \frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе (и равное ему напряжение на резисторе), q - заряд на конденсаторе. Наконец, сила тока через конденсатор равно скорости изменения его заряда

$$I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (14)$$

Подставляя значения сил токов в уравнение (12), получим

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{q}{RC} = I_0 \cos \omega t . \quad (15)$$

А теперь сравним это уравнение с уравнением (4) – они полностью совпадают (только обозначения другие), поэтому сразу переписываем ответ: зависимость заряда на конденсаторе от времени имеет вид

$$q = q_0 \cos \omega (t - \tau), \quad (16)$$

Где время задержки

$$\tau = RC . \quad (17)$$

максимальный заряд на конденсаторе равен

$$q_0 \approx I_0 RC , \quad (18)$$

Теперь становится понятным и смысл условия $\omega\tau << 1 \;\Rightarrow\; \tau << T$ время разряда конденсатора значительно меньше периода колебаний тока.

Часть 3. Теплоемкость земной атмосферы.

3.1 Так как столб находится в равновесии, то выполняется очевидное условие:

$$P_0 S = mg . \quad (19)$$

Из этого равенства следует, что масса воздуха равна

$$m = \frac{P_0 S}{g} \quad (20)$$

Численный результат удивителен, для площади в 1 м^2:

$$m = 1{,}0 \cdot 10^4 \, кг \approx 10 \, тонн \quad (21)$$

3.2 Обратим внимание, что как следует из формулы (20) давление воздуха на дно сосуда не зависит от температуры, т.е. оно постоянно. Мысленно разобьем столб воздуха на тонкие горизонтальные слои. Аналогичный вывод можно сделать и для давления в любом горизонтальном слое: оно остается постоянным при изменении температуры. Толщина слоя изменяется, но давление не изменяется! Следовательно, процесс расширения следует считать изобарным.

3.3 Не сложно показать, что при изобарном процессе молярная теплоемкость описывается уравнением Майера

$$C_P = C_V + R = \frac{7}{2}R. \qquad (22)$$

3.4 Полная теплоемкость воздушного столба равна

$$C = \frac{7}{2}\frac{P_0 S}{Mg}R = \frac{7}{2}\frac{1{,}0\cdot 10^5}{29\cdot 10^{-3}10}8{,}31 \approx 1{,}0\cdot 10^7 \frac{Дж}{м^2\cdot К}. \qquad (23)$$

3.5 К данной теплоемкости следует добавить теплоемкость слоя воды

$$C_1 = c\rho Sh \approx 0{,}42\cdot 10^7 \frac{Дж}{м^2\cdot К} \qquad (24)$$

Обратите внимание, что теплоемкость атмосферы более чем в два раза больше теплоемкости слоя воды!

Суммарная теплоемкость 1 м^2 поверхности земли равна

$$C \approx 1{,}4\cdot 10^7 \frac{Дж}{м^2\cdot К}. \qquad (25)$$

Часть 4. Так почему же январь холоднее декабря?

4.1 Главная причина изменения потока теплоты от Солнца – наклон земной оси к плоскости ее орбиты.

4.2 Очевидно, что период изменения равен одному году, поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}0\cdot 10^{-7}\,c^{-1}. \qquad (26)$$

4.3 Запишем уравнение теплового баланса с учетом теплоемкости Земли (в расчете на 1 м^2):

$$C\frac{\Delta T}{\Delta t} = q_0 + b\cos\omega t - \sigma T^4 \qquad (27)$$

Теперь подставим значение $T = \overline{T} + \delta$. Если $\delta << T$, то $\sigma\left(\overline{T} + \delta\right)^4 \approx \sigma\overline{T}^4 + 4\sigma\overline{T}^3\delta$. Тогда уравнение (36) преобразуется к виду

$$C\frac{\Delta\left(\overline{T} + \delta\right)}{\Delta t} = q_0 + b\cos\omega t - \sigma\overline{T}^4 - 4\sigma\overline{T}^3\delta. \qquad (28)$$

В этом уравнении $q_0 = \sigma\overline{T}^4$ (как условие теплового баланса в усредненном приближении). Наконец, перепишем (37) в виде

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t} = b\cos\omega t^4 - \frac{4\sigma\overline{T}^3}{C}\delta. \qquad (29)$$

А это уравнение совпадет с рассмотренными уравнениями (4) и (15) Поэтому его решение будет аналогичным!

Следовательно, приближенное значение временной задержки равно

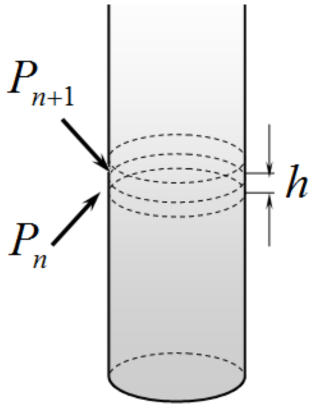
$$\tau = \frac{C}{4\sigma\overline{T}^3} \approx \frac{1{,}4\cdot 10^7}{4\cdot 5{,}7\cdot 10^{-8}(280)^3} \approx 2{,}8\cdot 10^6\,c \approx 32 суток. \qquad (30)$$

Эта величина в 10 раз меньше периода изменения потока энергии. Поэтому использованное приближение вполне применимо.

Как видно, проведенный анализ, даже в рамках приближенных моделей дал прекрасный результат!

<u>Дополнение для скептиков, не входящее в решение задачи.</u>

Почти очевидное заключение о том, что нагрев атмосферы происходит изобарно, можно подтвердить прямым расчетом.



Теплоемкость земной атмосферы.

Мысленно разобьем воздушный столб на тонкие слои толщиной h При переходе от слоя номер n к следующему слою давление будет уменьшаться на величину гидростатического давления в этом слое, т.е.

$$P_{n+1} = P_n - \rho g h. \tag{22}$$

Плотность воздуха в слое n зависит от давления в этом слое, эта зависимость следует из уравнения состояния идеального газа[1]:

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT}P. \tag{23}$$

Подстановка этого выражения в формулу (22) дает следующий результат

$$P_{n+1} = P_n - \rho_n g h = P_n - \frac{Mgh}{RT}P_n = P_n \xi \tag{24}$$

Где обозначено искомое значение знаменателя прогрессии

$$\xi = \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right) \tag{25}$$

Таким образом, зависимость давления от номера слоя имеет вид

$$P_n = P_0\left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)^n. \tag{26}$$

<u>Для любителей высшей математики</u>: при бесконечно малой толщине слоя эта формула преобразуется к виду (что можно получить, как с помощью предельного перехода в формуле (26), так и рассматривая выражение (24) как дифференциальное уравнение)

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right). \tag{26a}$$

3.2 Массы воздуха можно вычислить, как сумму масс всех слоев. Так как давление и плотность пропорциональны, то изменение плотности описывается формулой, аналогично формуле (26) для давления. Поэтому масса воздушного столба равна

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n S h = \rho_0 S h \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{\rho_0 S h}{1-\xi} = \frac{\frac{MP_0}{RT}Sh}{1 - \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)} = \frac{P_0 S}{g} \tag{27}$$

Такой же результат можно получить, интегрируя формулу (26а).

3.3 Для вычисления высоты центра масс следует воспользоваться определением

$$mH_C = \sum_{n=0}^{\infty} (nh)(\rho_n S h) \tag{28}$$

Здесь $(\rho_n S h) = m_n$ - масса слоя n, hn - высота, на которой находится этот слой. Вычислим эту сумму (с использованием формулы $\sum_{n=0}^{\infty} n\xi^n = \frac{\xi}{(1-\xi)^2}$):

[1] Не путайте универсальную газовую постоянную ни с радиусом сосуда, ни с сопротивлением конденсатора!

$$\sum_{n=0}^{\infty}(nh)(\rho_n Sh)=\rho_0 Sh^2\sum_{n=0}^{\infty}n\xi^n=\rho_0 Sh^2\frac{\xi}{(1-\xi)^2}=\frac{P_0M}{RT}Sh^2\frac{1-\frac{Mgh}{RT}}{\left(\frac{Mgh}{RT}\right)^2}=\frac{P_0S}{g}\cdot\frac{RT}{Mg}. \qquad (28)$$

На последнем шаге мы пренебрегли в числителе малым по сравнению с 1 слагаемым $\frac{Mgh}{RT}$ - действительно все наши рассуждения справедливы при очень малых h.

С учетом выражения (27) для массы столба, получаем, что его центр масс находится на высоте

$$H_C=\frac{RT}{Mg} \qquad (29)$$

Отметим, интересную и легко запоминающуюся формулу: высота центра масс изотермического столба газа удовлетворяет соотношению

$$\frac{MgH_C}{RT}=1.$$

Конечно, такой же результат следует и в результате интегрирования!

3.4 При расчете теплоемкости столба необходимо учесть, что при повышении температуры увеличивается не только кинетическая энергия молекул газа (т.е. его внутренняя энергия), но и потенциальная энергия в поля тяжести земли (обозначим изменение этой энергии ΔU_g.

Следовательно, теплоемкость воздушного столба равна

$$C=\frac{\delta Q}{\Delta T}=\frac{\Delta U}{\Delta T}+\frac{\Delta U_g}{\Delta T}. \qquad (30)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть теплоемкость газа при изохорном процессе

$$\frac{\Delta U}{\Delta T}=\frac{5}{2}\frac{m}{M}R. \qquad (31)$$

Второе слагаемое – описывает изменение потенциальной энергии в поле тяжести земли. Оно равно:

$$\frac{\Delta U_g}{\Delta T}=\frac{\Delta(mgH_c)}{\Delta T}=\frac{P_0S}{Mg}R=\frac{m}{M}R. \qquad (32)$$

Итак, полная теплоемкость столба воздуха оказывается равной:

$$C=\frac{7}{2}\frac{m}{M}R=\frac{7}{2}\frac{P_0S}{Mg}R. \qquad (33)$$