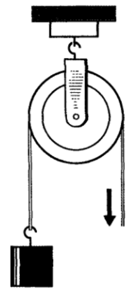
Механическая энергия.

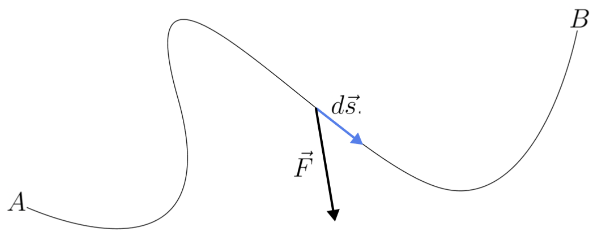


Закон сохранения энергии — фундаментальный закон природы, заключающийся в том, что для изолированной физической системы может быть введена скалярная физическая величина, являющаяся функцией параметров системы и называемая энергией, которая сохраняется с течением времени. Если физики сталкиваются с процессом, в котором энергия не сохраняется, то они придумывают новый вид энергии. *Именно поэтому энергия сохраняется всегда!*

В данной задаче предлагается подробно разобраться с одним из видов энергии: **механической энергией**.

Часть 1. Теорема об изменении Кинетической энергии.

Рассмотрим движение материальной точки (М.Т.) вдоль кривой s. М.Т. движется за счет действия непостоянной силы $\vec{F}$. Рассмотрим работу этой силы при перемещении М.Т. из точки A в точку B. Модуль скорости М.Т. в точке A v_A, в точке B v_B. Масса М.Т. m.



(1.1) Запишите, чему равна элементарная работа δA силы $\vec{F}$. Чему равна чему равна работа A силы $\vec{F}$? Ответ выразите через $\vec{F}, d\vec{s}$.

(1.2) Свяжите элементарную работу δA с модулем скорости точки. Ответ выразите через v, dv.

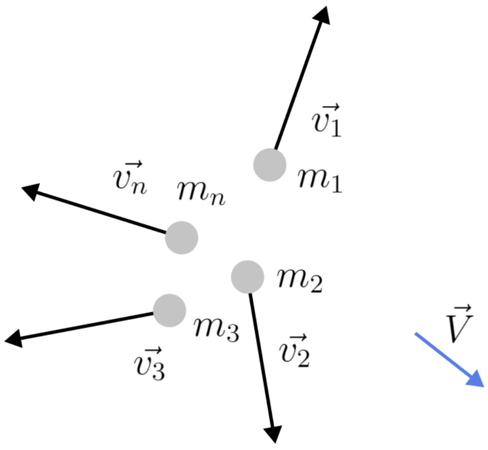
(1.3) Найдите работу по перемещению М.Т. из точки A в точку B. Ответ выразите через v_A, v_B, m.

Если теперь обозначить $K = \dfrac{mv^2}{2}$ - кинетической энергией М.Т., то получим:

$$A = K_B - K_A = \Delta K$$

Выражение выше называется *теоремой об изменении Кинетической энергии.*

Часть 2. Теорема Кёнига.



Теорема Кёнига связывает кинетическую энергию системы с разными точками пространства.

Пусть есть система из М.Т. со скоростями $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}...\vec{v_n}$ и массами $m_1, m_2, m_3...m_n$ относительно покоящейся точки О. Скорость некоторой точки(нематериальной) А $\vec{V}$.

(2.1) Найдите полную кинетическую энергию системы М.Т. K_O. В ответе запишите сумму. Ответ выразите через $m_i, \vec{v_i}$

(2.2) Найдите скорость i-ой М.Т. $\vec{u_i}$ относительно точки А. Ответ выразите через $\vec{v_i}, \vec{V}$.

(2.3) Получите выражение для полной кинетической энергии системы. В ответе запишите сумму. Ответ выразите через $m_i, \vec{u_i}, \vec{V}$

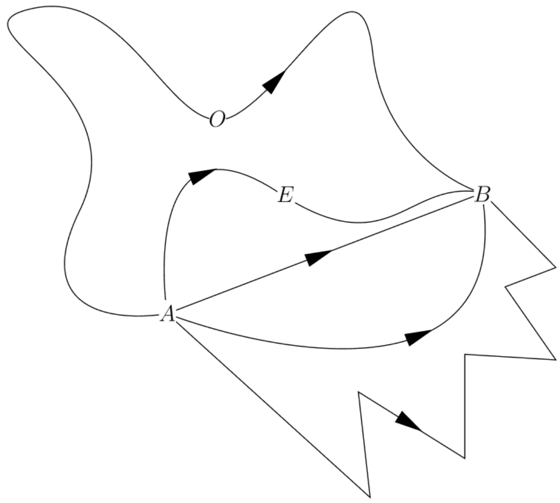
(2.4) Получите выражение для полной кинетической энергии. Ответ выразите через K_A - кинетическую энергию системы относительно точки А, а также некоторые суммы.

(2.5) Пусть точка А - центр масс системы. Чему равен суммарный импульс системы относительно центра масс?

(2.6) Свяжите кинетическую энергию K с кинетической энергией центра масс K_C, а также V_C, M скорость центра масс и суммарная масса системы соответственно.

Выражение $K = K_C + \dfrac{MV_C^2}{2}$ называется Теоремой Кёнига.

Часть 3. Потенциальная энергия.



Есть определенный тип сил (они называются **консервативными**), работа которых не зависит от пути. Т.е. работа по консервативной силы по любой траектории на рисунке одна и та же.

(3.1) Запишите, как связаны работа по перемещению A_{AEB} и A_{AOB}.

(3.2) Запишите, как связаны работы по перемещению A_{AO}, A_{OB}, A_{AB}.

Назовем потенциальной энергией U_X **работу консервативной силы по перемещению из данной точки** X **в точку** O.

(3.3) Как связаны U_A и A_{AO}

(3.4) Как связаны U_B и A_{OB}

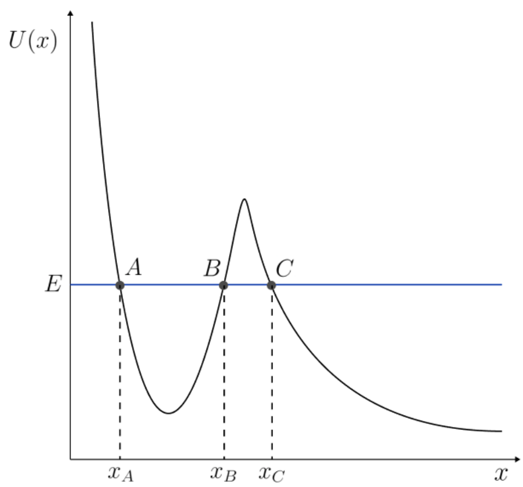
(3.5) Как связаны U_A, U_B, A_{AB}.

Часть 4. Закон сохранения механической энергии.

Если на М.Т. действуют только консервативные силы, то говорят, что механическая энергия $E = K + U$ сохраняется.

(4.1) Получите закон сохранения механической энергии.

Часть 5. Анализ потенциальной кривой.



Потенциальная кривая $U(x)$ - график зависимости потенциальной энергии, от положения М.Т. Ясно, что $U(x) \leq E$. Из чего можно сделать вывод, что М.Т. может находиться либо $[x_A; x_B]$ (**финитное** движение), либо $[x_C; +\infty)$ (**инфинитное** движение). Т.к. при финитном движении М.Т. колеблется между x_A, x_B, то такое движение называют **колебательным**. Рассмотрим задачу:

Материальная точка массы m может двигаться без трения вдоль оси X. Зависимость её потенциальной энергии от координаты задается выражением:

$$U(x) = ka^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2)$$

Где a, k - известные постоянные положительные величины.

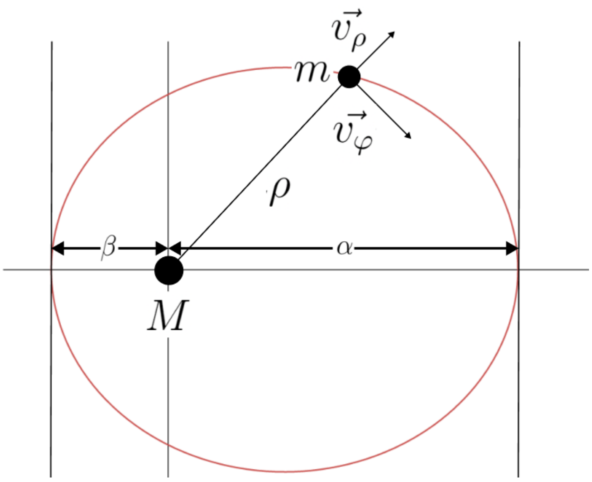
(5.1) Постройте схематический график $U(x)$. Найдите все параметры (асимптоты, экстремумы, нули и т.д.).

(5.2) Получите выражение для кинетической энергии М.Т. K. Ответе выразите через $m, \dot{x}$.

(5.3)Пусть полная энергия М.Т. E. Анализируя потенциальную кривую, получите **все** интервалы возможного нахождения М.Т. Ответ выразите через E, k, a.

Часть 6. Трава у дома...

При движении спутника массой m в гравитационном поле звезды массой M по эллипсу, он то отдаляется, то приближается к ней. Скорость спутника можно в любой момент времени разложить на радиальную $\vec{v_\rho}$ и азимутальную $\vec{v_\varphi}$



Из механики небесного тела известно, что при движении в гравитационном поле сохраняется величина **момента импульса**:

$$L = mv_\varphi\rho$$

(5.1) Чему равна потенциальная энергия $U(\rho)$ спутника в поле звезды. Ответ выразите через ρ, G, M, m.

(5.2) Получите выражение для кинетической энергии спутника K. Ответ выразите через m, v_φ, v_ρ.

(5.3)Получите выражение для полной энергии спутника E. Ответ выразите через m, L, G, M, v_ρ, ρ.

Таким образом мы свели задачу к одномерному движению, где кинетическая энергия записывается в виде $K = \frac{mv_\rho^2}{2}$

(5.4) Найдите эффективную потенциальную энергию $U_{eff}(\rho)$. Ответ выразите через m, L, G, M, ρ.

(5.5) Постройте схематический график $U_{eff}(\rho)$. Найдите все параметры (асимптоты, экстремумы, нули и т.д.).

(5.4) Анализируя потенциальную кривую, найдите апогей α и перигей β. Ответ выразите через E, m, L, G, M.

Математические подсказки:

$$\sum_1^n (\vec{x_i} + \vec{a})^2 = \sum_1^n x_i^2 + 2\vec{a}\sum_1^n \vec{x_i} + \sum_1^n a^2$$