

Условие

Задание 2. Системы единиц

Большинство физических величин имеют определенную размерность, т.е. измеряются в определенных единицах измерения. Любая система единиц измерения содержит основные единицы (для которых существуют определенные эталоны) и производные единицы, которые выражаются через основные единицы.

Часть 1. Система СИ

В настоящее время наибольшее распространения получила система единиц СИ. Как известно, к числу основных единиц этой системы относятся: - единица длины метр $[L] = \text{м}$; - единица времени секунда $[t] = \text{с}$; - единица массы килограмм $[m] = \text{кг}$; - единица силы тока ампер $[I] = \text{А}$. Далее мы рассмотрим некоторые производные единицы этой системы, которые могут быть выражены через приведенные здесь основные единицы.



1.1. Паскаль.

Блез Паскаль (фр. *Blaise Pascal*); (годы жизни 1623 -1662) - французский математик, физик, литератор, философ, теолог; один из основателей математического анализа, теории вероятностей; создатель первых образцов счетной техники, автор основного закона гидростатики. Его именем названа единица измерения давления в системе СИ.

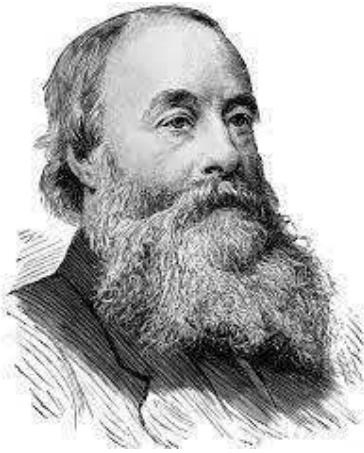
1.1.1 Выразите единицу измерения давления Паскаль через основные единицы измерения системы СИ.

1.1.2 А в каких единицах измерял давление сам Блез Паскаль? В *дюймах ртутного столба* - гидростатическое давление, которое создает столб ртути высотой в 1 дюйм. Чему равна единица давления Б. Паскаля в единице системы СИ - Паскалях.

1 дюйм равен 2,54 см; плотность ртути $\rho = 13,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, ускорение свободного падения $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$



1.2 . Джоуль



Джеймс Прескотт Джоуль (годы жизни 1818 – 1889) – английский физик, внесший значительный вклад в развитие термодинамики. Его именем названа единица измерения работы и энергии в системе СИ.

1.2.1 Выразите единицу измерения энергии Джоуль через основные единицы системы СИ.

1.2.2 А в каких единицах измерял работу Дж. П. Джоуль? В *фут-фунтах* - работа, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело массой 1 фунт на высоту 1 фут. Чему равна единица измерения работы Дж.П. Джоуля в единице системы СИ - Джоулях?

1 фут равен 30,5 см; 1 фунт равен 450 г.



1.3 . Ом

Георг Симон Ом (нем. *Georg Simon Ohm*) (годы жизни 1789 – 1854) – немецкий физик, теоретически вывел и экспериментально подтвердил закон, выражающий связь между силой тока, напряжением и сопротивлением. Его именем названа единица измерения электрического сопротивления в системе СИ.

1.3.1 Выразите единицу измерения сопротивления Ом через основные единицы системы СИ.

1.3.2 Во времена исследований Г.С. Ома еще не существовало строгих понятий силы тока, напряжения, электрического сопротивления. Поэтому фактический Г.С. Ом в качестве единицы сопротивления использовал сопротивление единицы длины медного провода – сантиметр. Рассчитайте, чему равно сопротивление 1 Ом в «медных» сантиметрах.

Удельное сопротивление меди $\rho = 0,0167 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$; считайте, что площадь поперечного сечения использованного медного провода равна 1,00 мм².



Часть 2. Планковская система единиц



Макс Карл Эрнст Людвиг Планк (нем. *Max Karl Ernst Ludwig Planck*; годы жизни 1858—1947) немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой физики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1918).

Выбор единиц измерения достаточно условный. Поэтому особую роль играют естественные системы единиц, в основу которых положены фундаментальные физические постоянные. Впервые такую систему единиц предложил Макс Планк. В этой системе все механические единицы выражаются через следующие постоянные (численные значения приведены в системе СИ, размерность этих постоянных Вы должны установить самостоятельно):

- скорость света $c = 3,00 \cdot 10^8$;
- гравитационную постоянную $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (которая входит в качестве коэффициента в закон всемирного тяготения $F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$);
- постоянную Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ (эта постоянная входит практически во все формулы квантовой механики, например, энергия светового фотона равна $E = h\nu$, ν - частота света). Считается, что планковская длина (и связанное с ней планковское время) определяют масштабы, на которых современные физические теории перестают работать: геометрия пространства-времени, предсказываемая общей теорией относительности, на расстояниях порядка планковской длины и меньших теряет смысл из-за квантовых эффектов. Предполагается, что явления природы на этих масштабах должна адекватно описывать некая гипотетическая, до настоящего времени не сформулированная, теория, объединяющая общую теорию относительности и квантовую механику — квантовая гравитация. Доказано, что планковская масса является нижним пределом масс чёрных дыр, и предполагается, что она представляет собой верхний предел для масс элементарных частиц.

2.1 Выразите единицу длины l_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h . Рассчитайте ее численное значение.

2.2 Выразите единицу времени t_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h . Рассчитайте ее численное значение.

2.3 Выразите единицу массы m_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h . Рассчитайте ее численное значение.



Решение

Задание 2. Системы единиц.

Часть 1. Система СИ.

1.1 Паскаль.

1.1.1 Размерность единицы давления выражается цепочкой формул

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{H}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}}. \quad (1)$$

1.1.2 По формуле для гидростатического давления $P = \rho gh$ получим:

$$1'' \text{ дюйм} = 13,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 2,54 \cdot 10^{-2} \text{м} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 3,26 \cdot 10^3 \text{Па} \quad (2)$$

1.2 Джоуль

1.2.1 Единица энергии имеет размерность (из $A = Fl$)

$$\text{Дж} = H \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}. \quad (3)$$

1.2.2 Работа в поле тяжести рассчитывается по формуле

$$A = mgh \quad (4)$$

Следовательно

$$1\phi \cdot \phi = 450 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 30,5 \cdot 10^{-2} \text{м} = 1,35 \text{Дж}. \quad (5)$$

1.3 Ом

1.3.1 С помощью закона Ома и определения электрических величин получим

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{A}{It} \cdot \frac{1}{I}. \quad (6)$$

Поэтому размерность единицы сопротивления выражается через основные единицы СИ следующим образом

$$\text{Ом} = \frac{\text{Дж}}{A^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot A^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3 \cdot A^2}. \quad (7)$$

1.3.2 Из формулы для сопротивления проводника

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (8)$$

Следует, что единица сопротивления Г.С. Ома в единицах системы СИ равна

$$1'' \text{ см} = 0,0167 \frac{\text{Ом} \cdot 10^{-6} \text{м}^2}{\text{м}} \frac{1 \cdot 10^{-2} \text{м}}{10^{-6} \text{м}^2} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{Ом}. \quad (9)$$

Поэтому

$$1 \text{Ом} = \frac{1}{1,67 \cdot 10^{-4}} '' \text{ см} = 6,00 \cdot 10^3 '' \text{ см}'' . \quad (10)$$

Вывод можно сформулировать следующим образом: один Ом равен 60 «медных метров».



Часть 2. Планковская система единиц.

Сначала определим размерности используемых фундаментальных констант. Размерность скорости света очевидна:

$$[c] = \frac{\text{М}}{\text{с}}. \quad (11)$$

Размерность гравитационной постоянной следует из закона всемирного тяготения:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \Rightarrow [G] = \frac{[F] \cdot [R^2]}{[m^2]} = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М} \cdot \text{М}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{КГ}^2} = \frac{\text{М}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{КГ}}. \quad (12)$$

Размерность постоянной Планка:

$$E = h\nu \Rightarrow [h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \text{Дж} \cdot \text{с} = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}^2}{\text{с}}. \quad (13)$$

2.1 Запишем формулу для Планковской длины, используя неизвестные показатели степеней:

$$l_P = G^\alpha h^\beta c^\gamma \quad (14)$$

На основании которого получим уравнение размерностей:

$$\text{М} = \left(\frac{\text{М}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{КГ}} \right)^\alpha \left(\frac{\text{КГ} \cdot \text{М}^2}{\text{с}} \right)^\beta \left(\frac{\text{М}}{\text{с}} \right)^\gamma. \quad (15)$$

Приравнивая показатели степеней одинаковых единиц, получим систему уравнений для неизвестных показателей

$$\begin{aligned} \text{М} : \quad 1 &= 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ \text{с} : \quad 0 &= -2\alpha - \beta - \gamma \\ \text{КГ} : \quad 0 &= -\alpha + \beta \end{aligned} \quad (16)$$

Решением этой системы являются числа:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = -\frac{3}{2}. \quad (17)$$

Тогда формула для планковской длины имеет вид:

$$l_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}. \quad (18)$$

Подстановка значений дает:

$$l_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4,05 \cdot 10^{-35} \text{ м}. \quad (19)$$

2.2 Формулу для планковского времени проще всего получить из очевидного выражения:

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}. \quad (20)$$

Его численное значение

$$t_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1,35 \cdot 10^{-43} \text{ с}. \quad (21)$$

2.3 Для расчета планковской массы поступаем аналогично п. 2.1

$$m_P = G^\alpha h^\beta c^\gamma \quad (22)$$

$$\kappa g = \left(\frac{M^3}{c^2 \cdot \kappa g} \right)^\alpha \left(\frac{\kappa g \cdot M^2}{c} \right)^\beta \left(\frac{M}{c} \right)^\gamma. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} m : \quad 0 &= 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ c : \quad 0 &= -2\alpha - \beta - \gamma \\ \kappa g : \quad 1 &= -\alpha + \beta \end{aligned} \quad (24)$$



$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Окончательно, формула для планковской массы имеет вид:

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}}. \quad (26)$$

Подстановка значений дает:

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 5,46 \cdot 10^{-8} \kappa g. \quad (27)$$

