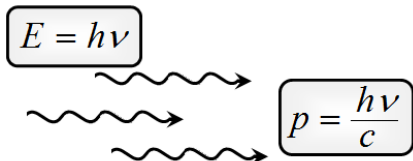


лазерный пинцет

Условие

Задание 2. Оптический пинцет

Оптический пинцет («лазерный пинцет» или «оптическая ловушка») - оптический инструмент, который позволяет передвигать микроскопические объекты с помощью лазерного света. В 2018 году нобелевская премия по физике «за изобретение оптического пинцета и его применение в биологических системах» была присуждена создателю оптического пинцета Артуру Эшкину.



В основу действия таких приборов положено хорошо известное явление – давление света. Световые частицы, фотоны, помимо энергии $E = h\nu$ (h - постоянная Планка, ν - частота света), обладают импульсом, модуль которого определяется формулой

$$p = \frac{h\nu}{c}, \quad (1)$$

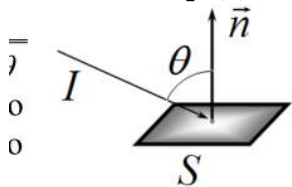
($c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ - скорость света в вакууме).

Направление вектора импульса фотона совпадает с направлением распространения света. Передача импульса света телам и обуславливает световое давление.

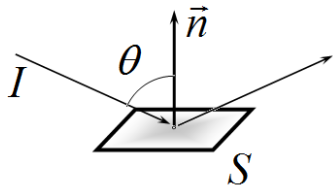
В данном задании используется понятие интенсивности света: энергия, переносимая светом в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно направлению распространения света.

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S}. \quad (2)$$

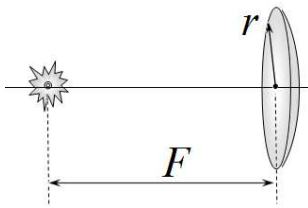
Часть 1. Продольная сила светового давления



1.1 Однородный световой поток интенсивности I падает под углом θ на плоскую абсолютно черную пластинку площади S и полностью поглощается пластинкой. Найдите, чему равен модуль силы светового давления на пластинку. Укажите направление этой силы.



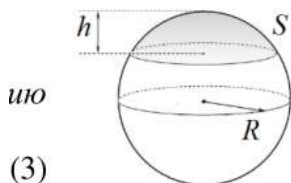
1.2 Однородный световой поток интенсивности I падает под углом θ на плоскую зеркальную пластинку площади S и полностью отражается от нее. Найдите, чему равен модуль силы светового давления на пластинку. Укажите направление этой силы.



1.3 Точечный изотропный источник света, световая мощность которого равна W_0 , расположен в фокусе тонкой собирающей линзы. Фокусное расстояние линзы равно F , ее радиус равен R . Найдите силу светового давления на линзу f . Укажите направление этой силы. Отражением и поглощением света пренебречь.

Подсказка. Площадь поверхности шарового сегмента равна произведению длины окружности большого круга шара на высоту сегмента:

$$S = 2\pi Rh. \quad (3)$$



(3)



Часть 2. Поперечная сила светового давления

В данной части задания рассматривается несколько примеров, когда прозрачный предмет освещается неоднородным световым потоком, интенсивность которого изменяется в поперечном сечении пучка.

Световой поток распространяется вдоль оси X . Его интенсивность зависит от координаты z (ось Z перпендикулярна направлению распространения света оси X). Можно считать, что в пределах освещаемого предмета эта зависимость интенсивности описывается линейным законом

$$I(z) = I_0 + gz \quad (4)$$

где $g = \frac{dI}{dz}$ - градиент интенсивности светового потока, считайте, что $g > 0$.

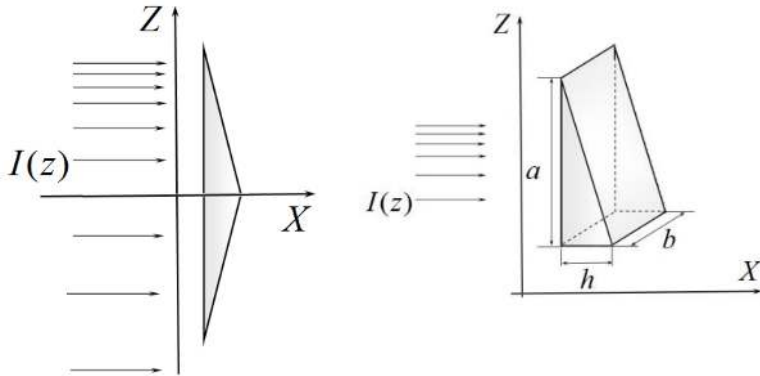
В таком световом потоке возможно возникновение силы светового давления, направленной перпендикулярно направлению распространения света, вдоль оси Z . Во всех пунктах этого задания Вы должны рассчитывать именно силу F_z , направленную перпендикулярно лазерному лучу. В реальных устройствах продольная сила светового давления F_x может быть компенсирована другими силами (например, силой реакции со стороны подложки), либо с помощью двух одинаковых световых лучей, распространяющихся навстречу друг другу.

Во всех вопросах данной задачи следует считать углы отклонения световых лучей малыми, так, что можно использовать приближенные значения тригонометрических функций:

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \quad (5)$$

Кроме того, следует считать, что при описании прохождения света через прозрачные предметы применимо приближение геометрической оптики, т.е. явления дифракции и интерференции света можно не учитывать. Также можно пренебречь поглощением и отражением света.

2.1 Симметричная бипризма, состоящая из двух одинаковых треугольных призм, освещается (как показано на рисунке) параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).

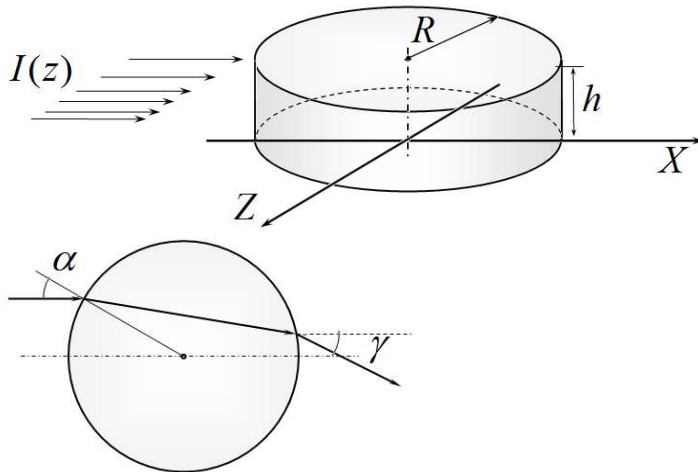


Бипризма находится в воздухе. Показатель преломления материала призмы равен n . Геометрические размеры призмы a, b, h показаны на рисунке. Угол при вершине призмы θ можно считать малым.

2.1.1 Найдите проекцию силы светового давления F_z , действующей на бипризму, на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету). Ответ выразите через величины I_0, g, c, n и геометрические размеры призмы a, b, h .

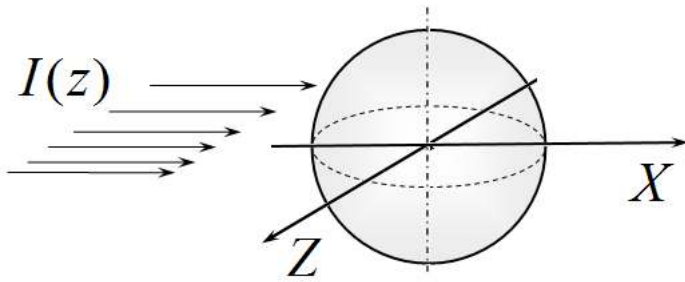


2.2 Прозрачный диск радиуса R и толщины h изготовлен из материала с показателем преломления n . Боковая поверхность освещается параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).



2.2.1 Рассмотрим луч света, падающий на боковую поверхность диска так, что угол между этим лучом и нормалью в точке падения равен α . Рассчитайте, на какой угол γ отклонится луч после прохождения диска.

2.2.2 Найдите проекцию силы светового давления, действующей на диск, F_z на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету). Ответ выразите через величины I_0, g, c, n и геометрические размеры диска R, h .



2.3 Прозрачный шарик радиуса R изготовлен из материала с показателем преломления n . Шарик освещается параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).

2.3.1 Покажите, что проекция силы светового давления, действующей на шарик, F_z на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету) рассчитывается по формуле

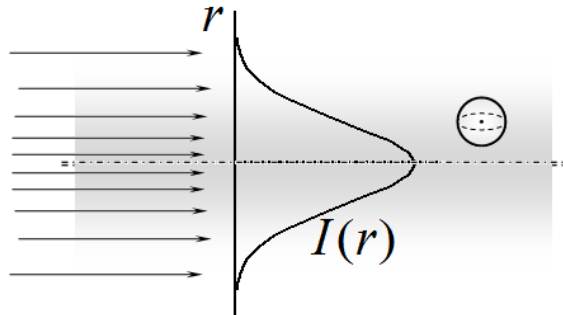
$$F_z = \beta \frac{n-1}{n} V \frac{1}{c} \frac{\Delta I}{\Delta z}, \quad (6)$$

где β - безразмерный коэффициент, V - объем шарика. 2.3.2 Рассчитайте численное значение коэффициента β .

Если Вам не удалось рассчитать значение этого коэффициента, то в последней части задачи используйте значение $\beta = 0,50$.



Часть 3. Перемещение с помощью оптического пинцета.



Стеклянный шарик радиуса $R = 1,31$ мкм с показателем преломления $n = 1,50$ находится в воде, показатель преломления которой равен $n_0 = 1,33$. Шарик передвигают с помощью осесимметричного лазерного пучка, мощность которого равна $P = 19$ мВт в направлении, перпендикулярном направлению распространения света. Распределение интенсивности пучка по его поперечному сечению (зависимость интенсивности от расстояния до оси пучка r) описывается формулой

$$I(r) = \frac{P}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad (7)$$

где $a = 3,20$ мкм.

При движении шарика в воде со скоростью $\vec{v}$ на него действует сила вязкого трения, которая рассчитывается по формуле Стокса

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}, \quad (8)$$

где $\eta = 8,90 \cdot 10^{-4}$ Па·с коэффициент вязкости воды.

3.1 Найдите, на каком расстоянии от оси пучка должен находиться шарик, чтобы он мог перемещаться с максимальной скоростью в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка.

3.2 Рассчитайте, с какой максимальной скоростью можно передвигать шарик с помощью лазерного луча в направлении, перпендикулярном пучку.

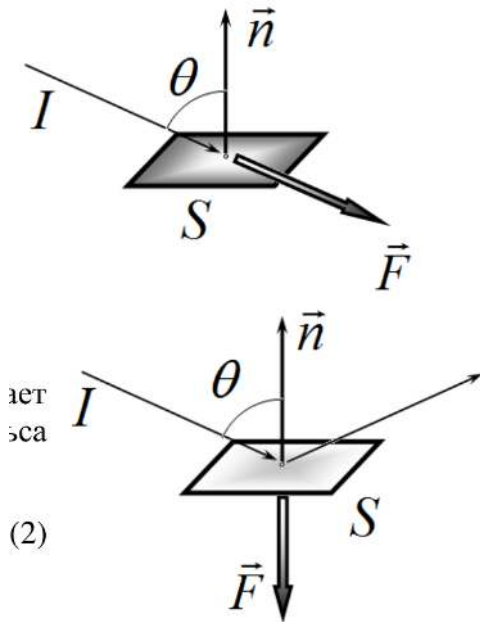
Численные значения параметров данной части взяты из работы А. Эшкина.



Решение

Задание 2. Оптический пинцет.

Часть 1. Продольная сила светового давления.



1.1 Импульс, который несет свет, падающий на пластинку, в единицу времени равен, равен импульсу, который получает пластинка. По второму закону Ньютона эта величина равна силе, действующей на пластинку. Поэтому

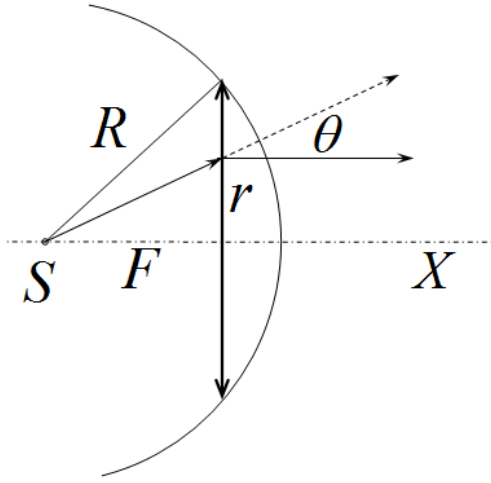
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{IS \cos \theta}{c} \quad (1)$$

Направление этой силы совпадает с направлением падающего света.

1.2 При полном отражении света, импульс, который получает пластинка равен удвоенной нормальной проекции импульса падающего света, поэтому в данном случае

$$F = 2 \frac{IS \cos \theta}{c} \cos \theta = 2 \frac{IS \cos^2 \theta}{c}. \quad (2)$$

В этом случае сила направлена по нормали к пластинке.



1.3 В данном случае изменение импульса падающего света связано с изменением направления распространения света вследствие преломления в линзе. Легко заметить, что проекция импульса на оптическую ось линзы после прохождения линзы увеличивается: все лучи становятся параллельными оптической оси, а модуль импульса каждого фотона не изменяется. Следовательно, линза получает импульс, направленный в сторону источника света, так же направлена и сила давления света: линза притягивается к источнику! Энергия, попадающая на линзу в единицу времени равна (см. рис.):

$$P_1 = \frac{W_0}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R(R - F) = \frac{W_0}{2} \left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + r^2}} \right), \quad (3)$$

здесь $R = \sqrt{F^2 + r^2}$. Следовательно, проекция на ось X импульса света, прошедшего через линзу в единицу времени равна:

$$p_1 = \frac{W_0}{2c} \left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + r^2}} \right), \quad (4)$$

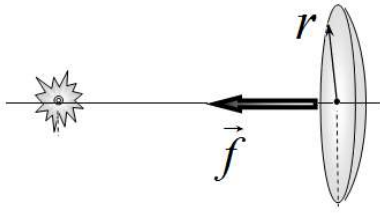
До преломления в линзе световые лучи идут под разными углами к оптической оси. Выделим на волновом фронте малую площадку площади ΔS . Проекция на ось X импульса света (в единицу времени), в направлении этой площадки равна



$$\Delta p_0 = \frac{W_0}{4\pi R^2 c} \Delta S \cos \theta = \frac{W_0}{4\pi R^2 c} \Delta S', \quad (5)$$

Где $\Delta S'$ - площадь проекции площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную оптической оси. Сумма всех $\Delta S'$ дает площадь линзы. Тогда, проекция импульса света на ось линзы равна

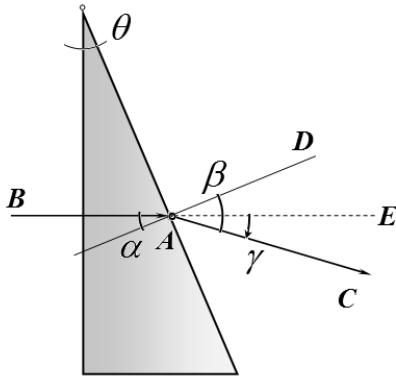
$$p_0 = \frac{W_0}{4\pi R^2 c} \cdot \pi r^2 = \frac{W_0}{4c} \frac{r^2}{F^2 + r^2}. \quad (6)$$



Окончательно, получаем, что модуль силы, действующей на линзу, равен

$$f = p_1 - p_0 = \frac{W_0}{4c} \left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + r^2}} \right)^2. \quad (7)$$

Часть 2. Поперечная сила светового давления.



2.1 В данном случае сила возникает также благодаря изменению направления распространения света.

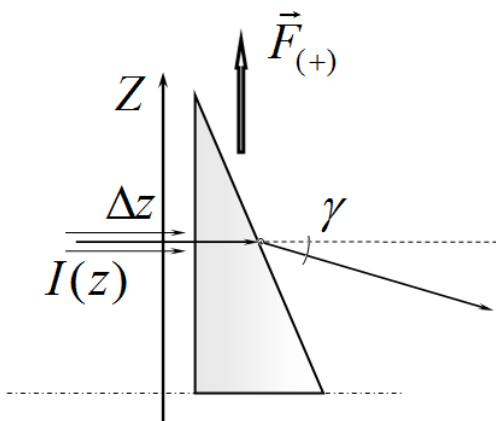
Угол отклонения луча γ после преломления в призме можно найти на основании закона преломления света и простых геометрических построений (см. рис.):

- угол падения на заднюю грань призмы: $\alpha = \theta$; - угол преломления:

$$n \sin \theta = \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta \approx n\theta;$$

- угол отклонения:

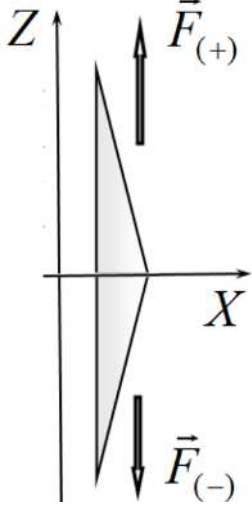
$$\gamma = \beta - \theta = (n - 1)\theta. \quad (8)$$



2.1 Пучок света, попадающий на бипризму в тонком слое толщиной Δz за единицу времени переносит импульс

$$\Delta p_0 = \frac{I(z)b\Delta z}{c} \quad (9)$$

После преломления в призме вектор импульса будет направлен под углом γ . Так проекция импульса системы (свет плюс призма) на ось Z остается равным нулю, то призма получает импульс, направленный в положительном направлении оси, равный



$$\Delta p_z = \frac{I(z)b\Delta z}{c} \sin \gamma \approx \frac{I(z)b\Delta z}{c} \gamma \quad (9)$$

При суммировании этих импульсов по верхней части бипризмы можно использовать среднее значение интенсивности (т.к. последняя изменяется по линейному закону). Поэтому поперечная сила, действующая на призму равна

$$F_{(+)} = \frac{I\left(\frac{a}{2}\right)ba}{c} \gamma = \frac{I\left(\frac{a}{2}\right)ba}{c} (n-1)\theta \quad (10)$$

Аналогично, сила, действующая на нижнюю часть бипризмы, равна



$$F_{(-)} = \frac{I\left(-\frac{a}{2}\right)ba}{c} (n-1)\theta \quad (11)$$

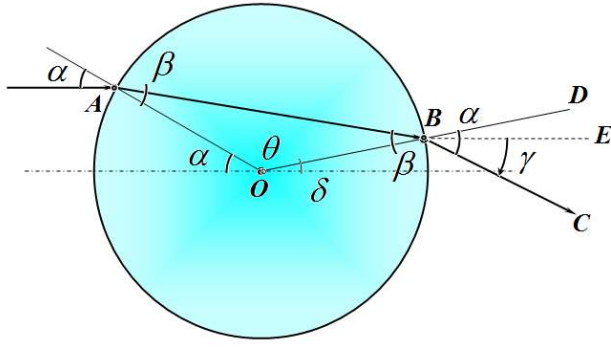
Суммарная поперечная сила равна

$$F = F_{(+)} - F_{(-)} = \frac{ba}{c} (n-1)\theta \left(I\left(\frac{a}{2}\right) - I\left(-\frac{a}{2}\right) \right) = g \frac{ba^2}{c} (n-1)\theta \quad (12)$$

и направлена в сторону увеличения интенсивности падающего света. Отметим, что полученное выражение можно представить в виде

$$F = g \frac{ba^2\theta}{c} (n-1)\theta = (n-1)V \frac{1}{c} \frac{\Delta I}{\Delta z}, \quad (13)$$

здесь $ba^2\theta = 2\left(\frac{1}{2}ab(a\theta)\right) = V$ - объем бипризмы.



2.2.1 На рисунке показан ход луча через призму. С помощью рисунка и закона преломления света (в приближении малых углов) находим угол отклонения луча:

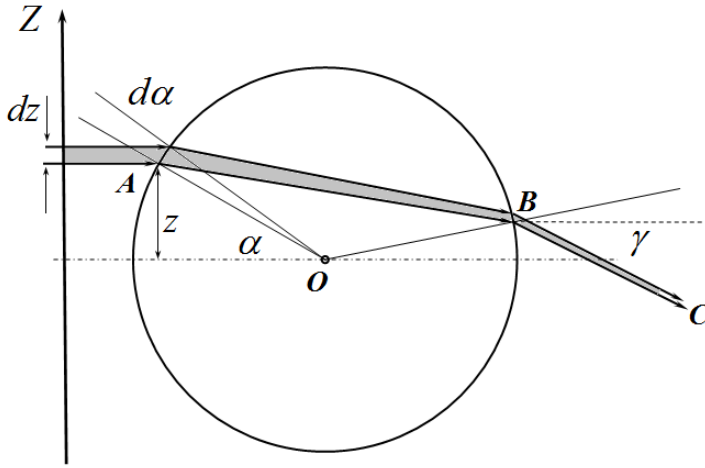
$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha - \delta = \alpha - (\pi - \alpha - \theta) = \\ &= \alpha - (\pi - \alpha - (\pi - 2\beta)) = 2(\alpha - \beta);\end{aligned}$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{n};$$

$$\gamma = 2(\alpha - \beta) = 2\frac{n-1}{n}\alpha. \quad (14)$$

2.2.2 Пучок света толщиной dz , падающий на боковую поверхность диска на расстоянии z от оси X , сообщает диску в единицу времени импульс, равный

$$dp_z = \frac{I(z)h dz}{c} \sin \gamma. \quad (15)$$



Для расчета суммарного импульса (и равной ему поперечной силы) это выражение следует проинтегрировать, с учетом соотношений

$$\sin \gamma \approx \gamma = 2\frac{n-1}{n}\alpha = 2\frac{n-1}{n}\frac{z}{R}. \quad (16)$$

В результате интегрирования получим

$$F_z = \int_{-R}^{+R} \frac{I(z)h}{c} \sin \gamma dz \approx \int_{-R}^{+R} \frac{(I_0 + gz)h}{c} 2\frac{n-1}{n}\frac{z}{R} dz = \frac{4}{3}\frac{n-1}{n}hR^2\frac{g}{c} \quad (17)$$

Отметим, что и эту формулу можно представить в виде

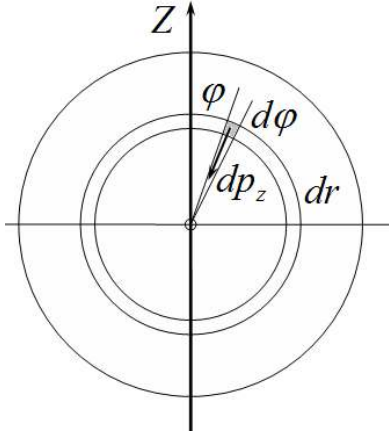
$$F_z = \frac{4}{3\pi} \frac{n-1}{n} (\pi R^2 h) \frac{g}{c} = \beta \frac{n-1}{n} V \frac{1}{c} \frac{dI}{dz} \quad (18)$$



Эта сила направлена в сторону увеличения интенсивности света.

2.3.1 Для расчета импульса, передаваемого шару, рассмотрим плоскость перпендикулярную направлению падения света. На площадку площадью $dS = r dr d\varphi$ падает свет, имеющий импульс

$$dp_0 = \frac{I(z) dS}{c}.$$



После преломления в шарике проекция этого импульса на ось Z будет равен

$$dp_z = -dp_0 \sin \gamma \cos \varphi. \quad (19)$$

Противоположно направленный импульс получит шарик. Суммарный импульс шарика можно получить, если проинтегрировать это выражение. Учтем, что

$$\sin \gamma \approx \gamma = 2 \frac{n-1}{n} \frac{r}{R};$$

$$z = r \cos \varphi$$

Поперечная сила равна

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{I_0 + gr \cos \varphi}{c} \cdot 2 \frac{n-1}{n} \frac{r}{R} \cos \varphi \cdot r dr = 2\pi \frac{n-1}{n} \frac{R^3}{4} \frac{g}{c} = \frac{3}{8} \frac{n-1}{n} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{g}{c} = \\ &= \frac{3}{8} \frac{n-1}{n} V \frac{1}{c} \frac{dI}{dz} \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом,

$$\beta = \frac{3}{8}. \quad (21)$$

Часть 3. Перемещение с помощью оптического пинцета.

3.1 Градиент интенсивности в пучке равен

$$g = \frac{dI}{dr} = -\frac{P}{\pi a^2} \frac{2r}{a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right). \quad (22)$$

Найдем его максимальное значение. Для этого вычислим производную найденной функции и приравняем ее к нулю

$$\left(r \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)' = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) - 2\frac{r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = 0. \quad (23)$$

Следовательно, градиент интенсивности принимает максимальное значение при

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

На этом расстоянии от оси должен находиться шарик, чтобы двигаться с максимальной скоростью. Максимальное значение градиента равно



$$|g_{\max}| = \frac{\sqrt{2}P}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (25)$$

3.1 Из равенства поперечной силы светового давления и силы вязкого трения

$$\frac{3}{8} \frac{n-1}{n} V \frac{1}{c} g_{\max} = 6\pi\eta R v \quad (26)$$

Находим максимально возможную скорость перемещения шарика:

$$v_{\max} = \frac{1}{12} \frac{n-1}{n} \frac{R^2}{\eta c} g_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12e^{0,5}} \frac{n-1}{n} \frac{R^2}{\eta c} \frac{P}{\pi a^3}. \quad (27)$$

Подстановка численных значений (с учетом $n = \frac{1,5}{1,33} = 1,13$) дает окончательный результат

$$v_{\max} \approx 9,8 \frac{\text{МКМ}}{c}. \quad (28)$$

