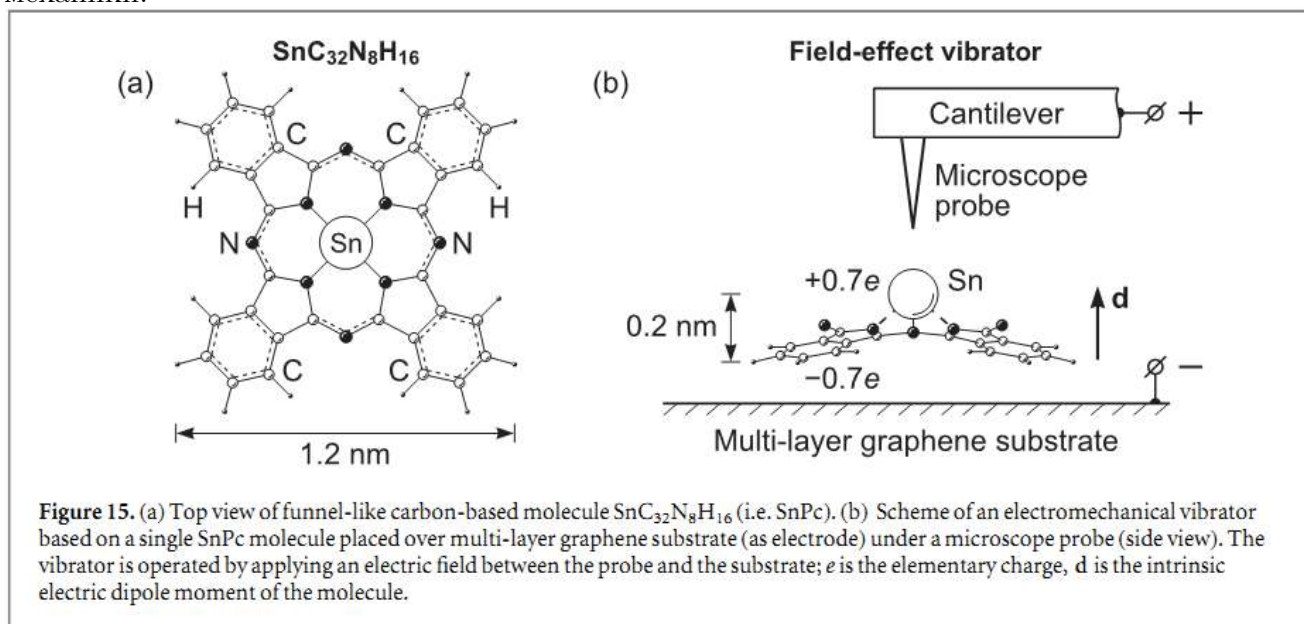


Условие

Задание 3. Молекулярный вибратор, управляемый электрическим полем.

Данное задание разработано на материалах обзорной статьи: *Synergy of physical properties of low-dimensional carbon-based systems for nanoscale device design*/ N. A. Poklonski, S.A. Vyrko, A. I. Siahlo, O. N. Poklonskaya, S. V. Ratkevich, N. N. Hieu, A. A. Kocherzhenko/ *Matter. Res. Express*, 6 (2019).

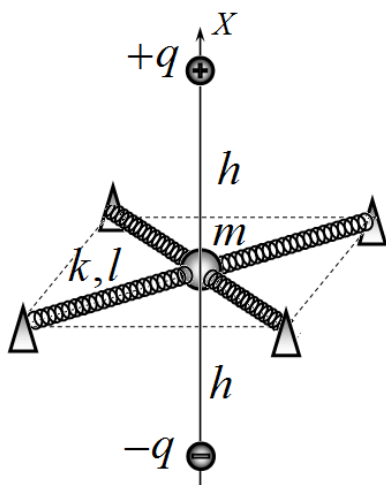
На рисунке, взятом из указанной статьи, показана схема вибратора, управляемого электрическим полем. Сложная плоская молекула (показанная на рисунке слева) содержит атом олова (Sn). Этот атом может колебаться в направлении, перпендикулярном плоскости молекулы. Частота этих колебаний может изменяться под действием электрического поля. Строгий расчет характеристик молекулярных колебаний возможен только с помощью квантовой механики.



Однако наиболее характерные особенности движения этого атома могут быть получены и в рамках классической физики. Для этого рассмотрим следующую упрощенную модель рассмотренного вибратора.

Шарик массы m (моделирующий атом олова Sn) соединен с 4 одинаковыми пружинами (моделируют химические связи атома олова с соседними атомами). Жесткость каждой пружины k , их длины в недеформированном состоянии равны l . Противоположные концы пружин закреплены в вершинах квадрата. Когда шарик находится в центре квадрата, пружины не деформированы. Шарик может двигаться вдоль прямой, перпендикулярной плоскости квадрата. Направим ось координат x вдоль этой прямой, начало отсчета совместим с центром квадрата.

На расстоянии h от центра квадрата закреплен точечный заряд $+q$, который моделирует заряд на острие зонда микроскопа (microscope probe).



Симметрично плоскости квадрата закреплен электрический заряд $-q$, который моделирует заряд-изображение в проводящей плоскости (grapheme substrate). В атомной физике силой тяжести следует пренебрегать. В данном задании анализируется движение шарика вдоль указанной оси X . Радиус шарика значительно меньше геометрических величин h, l .

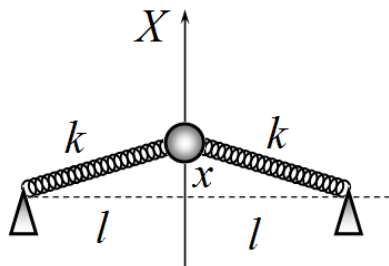
При выполнении данного задания рекомендуем использовать приближенную формулу

$$(1+z)^\gamma = 1 + \gamma z + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!} z^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!} z^3 + \dots \quad (1)$$

Эта формула справедлива для малых значений безразмерной величины $z \ll 1$ и любого показателя степени γ . Каждый раз при использовании этой формулы подумайте, сколько слагаемых следует оставлять для дальнейших преобразований.

Часть 1. Силы упругости.

Пусть шарик смещается на расстояние x от центра квадрата.



1.1 Найдите зависимость суммарной силы упругости $F(x)$, действующей на шарик со стороны 4 пружин, от смещения шарика x . Напоминаем, что, когда шарик находится в центре квадрата, пружины не деформированы!

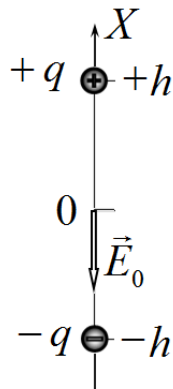
1.2 Покажите, что при $x \ll l$ формулу для суммарной силы упругости можно приближенно представить в виде

$$F = Cx^n. \quad (2)$$

Найдите значения постоянных величин C, n в этой формуле.

1.3 Укажите, будут ли колебания шарика при отсутствии электрического поля гармоническими?

Часть 2. Электрическое поле и электрические силы.



Электрическое поле создается двумя точечными зарядами $+q, -q$, расположенных на оси X симметрично относительно начала отсчета, в точках с координатами $\pm h$. 2.1 Найдите зависимость модуля напряженности электрического поля $E(x)$ на оси X от координаты x . Постройте схематический график этой зависимости. В дальнейшем вместо координаты шарика x используйте безразмерную величину $z = \frac{x}{h}$. При малых значениях $x \ll h$, полученную зависимость $E(x)$ с помощью приближенной формулы (1) можно представить в виде

$$E(z) = E_0 (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \quad (3)$$

где E_0 - напряженность поля в начале координат, $a_1, a_2, a_3, \dots$ - численные коэффициенты. В этой формуле следует оставить столько слагаемых, сколько потребуется для дальнейших расчетов.

Старшая лига. Теоретический тур. Условия задач. 8



2.2 Выразите значение E_0 через значения q, h . Рассчитайте значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$. В дальнейшем считайте величину E_0 известной. В дальнейших расчетах используйте только приближенную формулу (3) с найденными численными коэффициентами. Под действием электрического поля напряженности E шарик поляризуется и приобретает дипольный момент, модуль которого равен

$$p = \alpha \varepsilon_0 E \quad (4)$$

где α - поляризуемость шарика (считайте ее известной), ε_0 - электрическая постоянная. Со стороны электрического поля на электрический диполь действует сила

$$F = p \frac{dE}{dx}. \quad (5)$$

2.3 Найдите зависимость силы $G(z)$, действующей на шарик со стороны электрического поля, от положения шарика z .

2.4 Представьте полученную зависимость в приближенной виде

$$G(z) = G_1 \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \quad (6)$$

где G_1 - значение функции $G(z)$ при $z = 1$. Выразите значение G_1 через величины E_0, α, h . Найдите численные значения коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \dots$. Оставьте в этой формуле столько слагаемых, сколько необходимо для дальнейших расчетов.

Часть 3. Колебания шарика.

3.1 Представьте зависимость силы упругости от положения шарика (2) в виде

$$F(z) = F_1 \cdot z^n \quad (7)$$

где F_1 - значение функции при $z = 1$. Выразите значение F_1 через заданные параметры модельной системы.

При включении электрического поля положение равновесия шарика смещается. Обозначим координату положения равновесия z_0

3.2 Выразите значения координаты положения равновесия z_0 через параметры системы F_1 и G_1 .

3.3 Найдите максимальное значение напряженности электрического поля в начале координат $E_{0\max}$, при котором шарик может совершать колебания.

3.4 Рассчитайте частоту ν малых колебаний шарика вблизи положения равновесия z_0 , если напряженность электрического поля в начале координат $E_0 < E_{0\max}$. Выразите значения частоты ν через параметры F_1, G_1, z_0, m .