

Условие

9-1. Максимальная дальность полета камня, выпущенного из неподвижной катапульты, равна $S = 22,5$ м. Найдите максимально возможную дальность полета камня, выпущенного из этой же катапульты, установленной на платформе, которая движется горизонтально с постоянной скоростью $v = 15,0$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать $g = 10,0$ м/с².

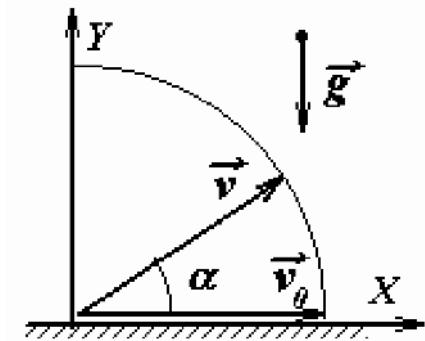
Решение

9-1. Хорошо известно, что максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, достигается при угле вылета равном 45° и определяется формулой

$$S = \frac{v_0^2}{g}. \quad (1)$$

Из этой формулы можно найти скорость, которую катапульта сообщает камню

$$v_0 = \sqrt{gS} = 15 \text{ м/с}.$$



Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: X — направлена горизонтально, а Y — вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.

Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты $v = v_0$. Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом α к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 + v_0 \cos \alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Закон движения камня имеет вид

$$\begin{aligned} x &= v_{x0}t = v_0(1 + \cos \alpha)t \\ y &= v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив $y = 0$,

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (4)$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3), получим дальность полета камня

$$S_1 = v_0(1 + \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (5)$$

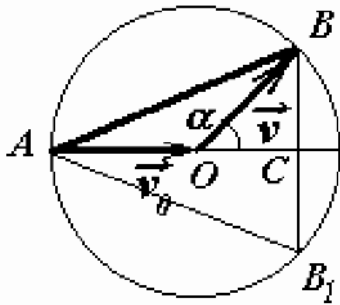
Отвлечемся немного от решения данной конкретной задачи и порассуждаем о полученном выражении. Во-первых, если катапульта неподвижна ($v = 0$), то формула (5) переходит в известное выражение для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом α к горизонту

$$S' = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (6)$$

Во-вторых, из (5) совсем не следует, что S_1 будет максимально при $\alpha = 45^\circ$ (это справедливо для (6), когда $v = 0$).

Предлагая эту задачу на республиканскую олимпиаду, авторы были убеждены, что девять десятых участников получают формулу (5) и затем подставляют в нее значение $\alpha = 45^\circ$. Однако, к нашему сожалению, мы ошиблись: ни один из олимпийцев не усомнился в том, что максимальная дальность полета всегда (!) достигается при угле вылета, равном 45° . Этот широко известный факт имеет ограниченные рамки применимости: он справедлив только, если: а) не учитывать сопротивление воздуха; б) точка вылета и точка падения находятся на одном уровне; в) метательный снаряд неподвижен.

Вернемся к решению задачи. Итак, нам необходимо найти значение угла α , при котором S_1 , определяемое формулой (5), максимально. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение α . Однако учитывая, что задача была предложена ученикам 9-х классов, мы дадим ее геометрическое решение. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v = v_0 = 15$ м/с.



Расположим векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке O . Тогда длина отрезка AC равна $v_0 + v_0 \cos \alpha$ (это есть v_{x0}), а длина отрезка BC равна $v_0 \sin \alpha$ (это v_{y0}). Их произведение равно удвоенной площади треугольника ABC , или площади треугольника ABV_1 . Обратите внимание, что именно произведение $v_{x0}v_{y0}$ входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади $\triangle ABV_1$ на постоянный множитель $\frac{2}{g}$. А теперь зададимся вопросом: какой из вписанных в данную окружность треугольников имеет максимальную площадь? Естественно, правильный! Поэтому искомое значение угла $\alpha = 60^\circ$.

Вектор $\vec{AB}$ есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом 30° к горизонту (опять же отнюдь не 45°).

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить $\alpha = 60^\circ$.

$$S_1 = \frac{2v_0^2}{g}(1 + \cos 60^0) \sin 60^0 = S \frac{3\sqrt{3}}{2} = 58,5\text{M}.$$