

Условие

10-2. Для отправки команды школьников Беларуси на международную олимпиаду по физике пробурили идеально прямой туннель Барановичи – Пекин. Вагон с пассажирами может двигаться по этому туннелю без трения, только под действием силы тяжести. Рассчитайте время движения от Барановичей до Пекина. (Радиус Земли принять 6400 км.)

Решение

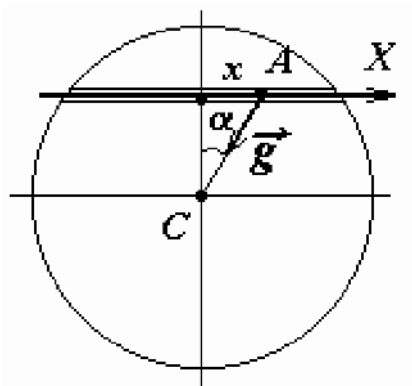
10-2. При движении вагона внутри туннеля сила тяжести вагона будет изменяться при изменении расстояния до центра Земли. Найдем ускорение свободного падения g в точке, находящейся на расстоянии r до центра Земли. Слои, находящиеся на большем расстоянии от центра не будут вносить вклад в величину силы тяжести. Поэтому по закону всемирного тяготения

$$mg = G \frac{m}{r^2} \frac{4}{3} \pi \rho r^3 = \frac{4\pi}{3} G \rho r, \quad (1)$$

где ρ — средняя плотность Земли, G — гравитационная постоянная. Учитывая, что на поверхности Земли ускорение свободного падения равно $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$, из (1) можно записать

$$g = g_0 \frac{r}{R}, \quad (2)$$

где R — радиус Земли.



Пусть ось X направлена вдоль туннеля, начало отсчета совместим с его центром. Тогда в точке A , находящейся на расстоянии $r = |AC|$ от центра Земли, ускорение вагона может быть найдено из второго закона Ньютона

$$ma = -mg \sin \alpha, \quad (3)$$

учитывая (1), получим

$$a = -g_0 \frac{r}{R} \sin \alpha = -\frac{g_0}{R} x, \quad (4)$$

где $x = r \sin \alpha$ координата точки A . (4) есть уравнение гармонических колебаний, с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}},$$

Время движения в одну сторону τ равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2540 \text{ с} \approx 40 \text{ мин.} \quad (5)$$

Интересно заметить, что это время остается одним и тем же для любых точек, находящихся на поверхности Земли и соединенных прямым туннелем.