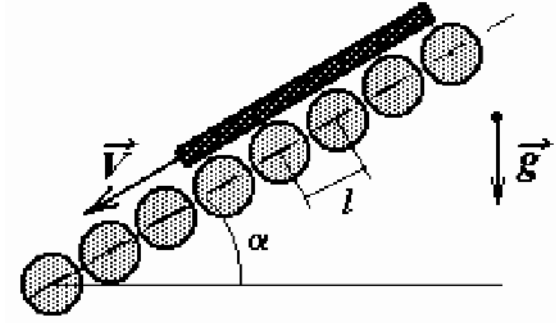


Условие

10-1. Однородная балка массой M и длиной L движется по наклонному прокатному стану, представляющему собой шероховатые тонкостенные неслеприкасающиеся цилиндры, оси которых параллельны и находятся на расстоянии l друг от друга ($l \ll L$). Масса каждого цилиндра m . Определите установившуюся скорость движения балки по стану. Угол наклона стана к горизонту α .



Решение

10-1. Поскольку цилиндры шероховатые, то при движении балки раскручиваются цилиндры, находящейся под ней, на что расходуется потенциальная энергия опускающейся балки. В идеализированном варианте после прохождения балки будут вращаться все цилиндры прокатного стана. Это обстоятельство и приводит к тому, что в конце концов движение станет равномерным.

Для решения задачи воспользуемся энергетическими соображениями. Пусть искомая скорость v . За время τ ($\tau \gg \frac{l}{v}$) балка пройдет по стану путь $S = v\tau$, при этом освободится потенциальная энергия

$$E^n = Mgv\tau \sin \alpha. \quad (1)$$

При этом раскручивается до прекращения проскальзывания $N = \frac{v\tau}{l}$ новых цилиндров, кинетическая энергия которых

$$E^k = N \frac{l}{2} mv^2. \quad (2)$$

При записи (1) учтено, что цилиндры тонкостенные и все точки цилиндров имеют одинаковую скорость. Для корректного решения задачи необходимо учесть неизбежное выделение теплоты при проскальзывании и трении балки о цилиндры. Для вычисления этой энергии заметим, что (2) аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки, поэтому рассмотрим шайбу массы m аккуратно, (т. е. без начальной скорости) положенную на шероховатую горизонтальную ленту транспортера, движущуюся со скоростью v . Под действием трения скольжения шайба начнет набирать скорость с ускорением $a = \mu g$, а через время $\tau^* = \frac{v}{\mu g}$ трение скольжения исчезнет.

При этом выделиться теплота:

$$Q = \sum_i F_{\text{тр}} v_i \Delta t_i = F_{\text{тр}} \sum_i v_i \Delta t_i = \{v = at\} = F_{\text{тр}} \frac{v}{2} \tau^*. \quad (3)$$

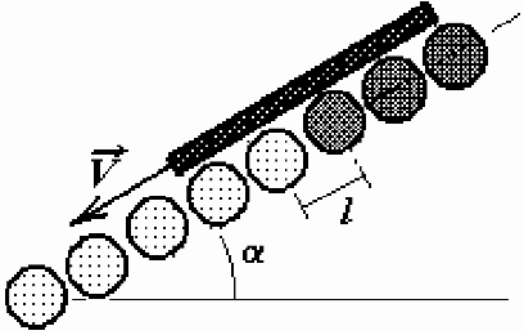
С другой стороны, согласно основному закону динамики в импульсной форме:

$$mv = F_{\text{тр}} \tau^*. \quad (4)$$

Из (3)-(4) легко находим:

$$Q = \frac{1}{2}mv^2.$$

Таким образом мы показали, что при разгоне трением скольжения, энергетические (тепловые) потери равны кинетической энергии тела в конечном состоянии, т. е. пренебрегать ими нельзя. Возвращаясь к цилиндрам, заметим, что все вышесказанное будет справедливо, если балка достаточно длинна, т. е. иначе $\tau^* < \frac{L}{v}$ (чтобы проскальзывание успело исчезнуть). На рисунке раскрученные цилиндры заштрихованы, а раскручивающиеся — нет.



С учетом изложенного баланс энергий запишется в виде

$$E^n = E^k + Q = 2E^k = mv^2 N. \quad (5)$$

Далее

$$Mgv\tau \sin \alpha = \frac{v\tau}{l}mv^2. \quad (6)$$

Откуда

$$v^2 = gl \frac{M}{m} \sin \alpha \Rightarrow v = \sqrt{gl \frac{M}{m} \sin \alpha}. \quad (7)$$