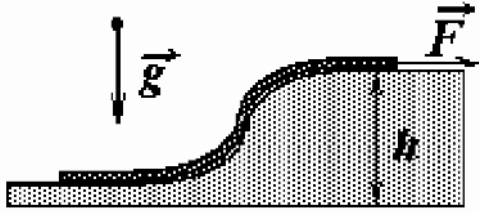


Условие

9-5. Однородную гибкую нерастяжимую веревку массы m и длины L втаскивают на гладкую горку высоты h , профиль которой показан на рисунке, под действием постоянной горизонтально направленной силы F . Определите ускорение веревки.



Решение

9.5 Рассмотрим силы, действующие на небольшой участок веревки длиной Δl_i - сила тяжести $\Delta m_i \vec{g}$, и натяжения веревки с двух сторон от выделенного участка $\vec{T}_{1i}$ и $\vec{T}_{2i}$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного кусочка в проекции на направление самого участка (на рисунке обозначена ось x):

$$\Delta m_i a = T_{2i} - T_{1i} - \Delta m_i g \cos \alpha_i,$$

Выразим массу кусочка $\Delta m_i = \frac{m}{L} \Delta l_i$ и подставим в полученное уравнение

$$\frac{m}{L} \Delta l_i a = T_{2i} - T_{1i} - \frac{mg}{L} \Delta l_i \cos \alpha_i,$$

где a - ускорение веревки.

Просуммируем уравнения, относящиеся ко всем участкам веревки. Учтем, что силы натяжения отдельных участков встречаются дважды, причем с различными знаками, поэтому их сумма для всех внутренних участков обратится в нуль, останется только сила натяжения одного из концов веревки (то есть F). Очевидно, что сумма длин Δl_i равна длине веревки L ; величина $\Delta l_i \cos \alpha_i = \Delta h_i$ есть разность высот концов выделенного участка, поэтому сумма этих величин равна h . Таким образом, после суммирования получим

$$ma = F - \frac{h}{L} mg.$$

Откуда находим ускорение

$$a = \frac{F}{m} - \frac{h}{L} g.$$

Данная задача может быть также легко решена с использованием энергетического подхода. Пусть за время Δt веревка сместилась на расстояние Δx , тогда сила F совершила работу $A = F \Delta x$, которая пошла на увеличение кинетической $\Delta E_{\text{кин.}} = \Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = mv \Delta v$ и потенциальной энергии $\Delta E_{\text{пот.}} = m \frac{\Delta x}{L} gh$ веревки. Таким образом,

$$F \Delta x = mv \Delta v + m \frac{\Delta x}{L} gh.$$

Разделим это уравнение на Δt (с учетом $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$, $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$) и сократим на v , получим

$$F = ma + \frac{h}{L} mg,$$

откуда следует ответ задачи.

