Условие

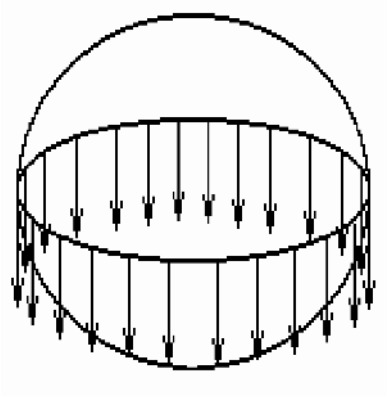
4. В качестве модели упругой пленки можно рассмотреть квадратную сетку, образованную очень маленькими пружинками с жесткостью k. Покажите, что в рамках данной модели потенциальная энергия однородно растянутой пленки определяется формулой $U = k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2$, где S - площадь растянутой пленки, S_0 - ее площадь в недеформированном состоянии. Из пленки изготовили воздушный шарик, радиус которого при недеформированной пленке равен r_0. Найдите зависимость давления воздуха внутри шарика от его радиуса. Атмосферным давлением пренебречь.

Решение

10.4 В рамках указанной модели представим пленку как квадратную сетку, состоящую из маленьких пружинок длиной a. Пусть кусок пленки имеет форму квадрата со стороной l_0 ($l_0 \gg a$). Тогда этот кусок имеет $N = 2\frac{l_0^2}{a^2}$ пружинок (площадь одной ячейки равна a^2, а на каждую ячейку приходится 2 пружинки - каждая пружинка «принадлежит двум соседним ячейкам!). Если растянуть пленку до квадрата со стороной l, то длина каждой пружинки увеличится на величину $\Delta x = \frac{l}{l_0}a - a = \frac{a}{l_0}(l - l_0)$. Поэтому увеличение потенциальной энергии пленки будет определяться формулой

$$U = N\frac{k(\Delta x)^2}{2} = k(l - l_0)^2 = k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2, \tag{1}$$

где $S = l^2$ - площадь растянутой пленки, $S_0 = l_0^2$ - площадь недеформированной пленки.
Рассмотрим шарик, изготовленный из эластичной пленки. Пусть при недеформированной пленке радиус шарика равен r_0. Тогда на длину



«экватора» приходится $n = \frac{2\pi r_0}{a}$ упругих пружинок, натяжения которых будут уравновешивать силы давления воздуха. При радиусе шарика r суммарная сила давления воздуха на полусферу

$$F = P\pi r^2 \tag{2}$$

будет уравновешена силами упругости

$$nk\Delta x = \frac{2\pi r_0}{a}k\left(\frac{r}{r_0}a - a\right) = 2\pi k(r - r_0), \tag{3}$$

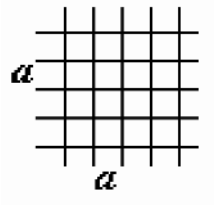
где учтено, что удлинение каждой пружинки может быть найдено из подобия $\Delta x = \frac{r}{r_0}a - a$. Приравнивая эти силы, находим равновесное значение давления газа

$$P = 2k\frac{r - r_0}{r^2}. \tag{4}$$

Возможен и другой подход к вычислению давления. При увеличении радиуса шара на малую величину Δr, газ совершит работу

$$A = P\Delta V = P4\pi r^2 \Delta r. \tag{5}$$

Эта работа пойдет на увеличение потенциальной энергии пленки $\Delta U = U(r + \Delta r) - U(r)$. Воспользуемся формулой (1) для вычисления этой величины

$$\Delta U = k \cdot 4\pi \cdot 2(r - r_0)\Delta r, \tag{6}$$

при выводе которой учтено, что площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$. Приравняв выражения (5) и (6), получаем прежний результат (4).