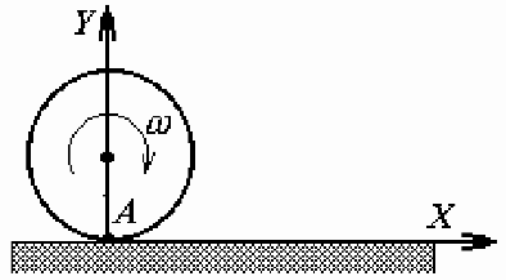


Условие

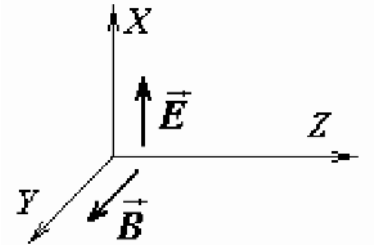
4.1 Колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, вращаясь вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Введем декартову систему координат, как показано на рисунке. Точка A , находящаяся на ободе колеса, в момент времени $t = 0$ находилась в начале координат. Запишите уравнения, описывающие зависимости от времени проекций ускорения a_x, a_y ; проекций скорости v_x, v_y ; координат x, y точки A .



Найдите среднюю скорость $\langle \vec{v} \rangle$ движения точки A за достаточно большой промежуток времени.

4.2 Две одинаковых частицы, массы которых равны m , движутся вдоль оси X под действием изменяющихся во времени сил. На первую частицу действует сила, $F_1 = F_0 \sin \omega t$ на вторую $F_2 = F_0 \cos \omega t$ (F_0, ω - известные постоянные величины). Запишите уравнения зависимостей от времени ускорений частиц a_1, a_2 , скоростей частиц v_1, v_2 , их координат x_1, x_2 . Найдите средние скорости частиц за достаточно большой промежуток времени.

4.3 Электрон движется в поле плоской электромагнитной волны, вектор напряженности электрического поля которой направлен вдоль оси X и изменяется со временем по закону $E = E_0 \cos \omega t$, а вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси Y и изменяется со временем по закону $B = B_0 \cos \omega t$. Длина волны велика настолько, что можно пренебречь зависимостью характеристик волны от координаты Z . В поле электромагнитной волны при не слишком больших скоростях движения электрона v выполняется соотношение $E_0 \gg v B_0$. Используя это соотношение, найдите зависимость проекции скорости электрона на ось X от времени. Найдите среднюю скорость движения электрона вдоль оси Z (скорость дрейфа электрона). Считайте, что первоначально скорость электрона равнялась нулю.

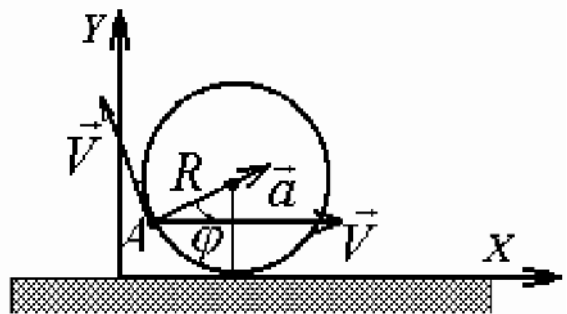


Решение

4.1 Пусть колесо повернулось на угол $\varphi = \omega t$, при этом его центр сместился на расстояние $x_0 = \omega R t$. Координаты точки A в этот момент будут определяться выражениями

$$\begin{cases} x = R(\omega t - \sin \omega t) \\ y = R(1 - \cos \omega t) \end{cases} \quad (1)$$

Скорость точки A можно представить как сумму скоростей поступательного движения $V = \omega R$, направленной горизонтально, и вращательного движения $V = \omega R$, направленной по касательной к ободу колеса. Поэтому компоненты полной скорости точки A имеют вид



$$\begin{cases} V_x = \omega R(1 - \cos \omega t) \\ V_y = R\omega \sin \omega t \end{cases} . \quad (2)$$

Ускорение точки A является центростремительным, направленным к центру колеса. Модуль ускорения $a = R\omega^2$, а его проекции на оси координат

$$\begin{cases} a_x = R\omega^2 \sin \omega t \\ a_y = R\omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что уравнения (2), (3) могут быть получены простым дифференцированием функций (1).

Понятно, что средняя скорость точки A направлена вдоль оси X и равна

$$\langle V \rangle = \omega R. \quad (4)$$

4.2 На основании второго закона Ньютона можно записать уравнения, описывающие ускорения точек

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \\ a_2 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{cases} \quad (5)$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями (3), для большей наглядности перепишем их в виде

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F_0}{m\omega^2} \omega^2 \sin \omega t \\ a_2 = \frac{F_0}{m\omega^2} \omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad (6)$$

Если обозначить $\frac{F_0}{m\omega^2} = R$, то получим полное совпадение.

Причем, что немаловажно, совпадают и начальные условия — при $t = 0$ координаты и скорости точек равны нулю. Следовательно, выражения для скоростей и ускорений будут теми же, что и в предыдущем пункте, поэтому нам достаточно переписать функции (2), (1), заменив в них R на $\frac{F_0}{m\omega^2}$:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) \\ V_2 = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{F}{m\omega^2}(\omega t - \sin \omega t) \\ x_2 = \frac{F}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) \end{cases} . \quad (8)$$

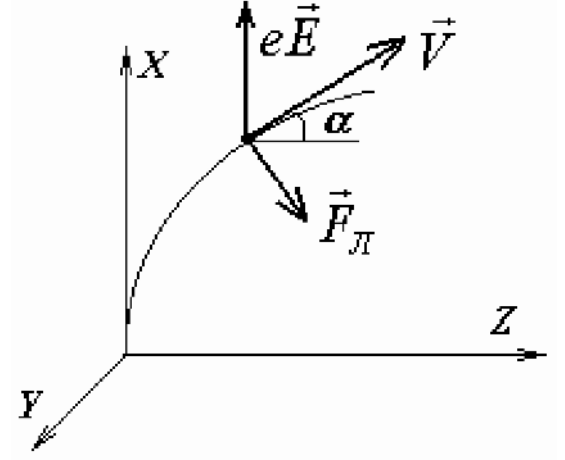
Продолжая аналогию между двумя задачами, сразу найдем

$$\begin{cases} \langle V_1 \rangle = \frac{F_0}{m\omega} \\ \langle V_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

4.3 На электрон в поле волны действуют

- а) постоянная сила со стороны электрического поля $e\vec{E}$, направленная вдоль оси X ;
- б) со стороны магнитного поля сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору индукции магнитного поля, то есть параллельная плоскости XZ .

Если считать, что в начальный момент времени электрон находился в начале координат и покоился, то траектория его дальнейшего движения будет лежать в плоскости XZ . Учитывая, что модуль силы Лоренца равен $F_L = eVB$, а направление этой силы перпендикулярно скорости, можно записать уравнения движения электрона на основании второго закона Ньютона



$$\begin{cases} ma_x = eE - eBV \cos \alpha = eE - eBV_z \\ ma_z = eBV \sin \alpha = eBV_x \end{cases} . \quad (10)$$

Так как в поле электромагнитной волны сила Лоренца значительно слабее электрической силы, то в первом уравнении системы (10) можно пренебречь вторым слагаемым. Тогда это уравнение примет вид

$$a_x = \frac{eE_0}{m} \cos \omega t, \quad (11)$$

решение которого мы уже дважды записывали по ходу решения задачи. Поэтому воспроизведем здесь без комментариев

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \\ x &= \frac{eE_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \end{aligned} . \quad (12)$$

Подставим найденное выражение для компоненты скорости электрона V_x во второе уравнение системы (10):

$$a_z = \frac{e}{m} B_0 \cos \omega t \frac{e E_0}{m \omega} \sin \omega t = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{E_0 B_0}{2 \omega} \sin 2 \omega t . \quad (13)$$

Такое уравнение также решено нами ранее, поэтому

$$V_z = \left(\frac{e}{2 m \omega} \right)^2 E_0 B_0 (1 - \cos 2 \omega t) . \quad (14)$$

Средняя скорость дрейфа электронов определяется по формуле

$$\langle V_z \rangle = \left(\frac{e}{2 m \omega} \right)^2 E_0 B_0 . \quad (15)$$



$$\langle V_z \rangle = \left(\frac{e}{2 m \omega} \right)^2 E_0 B_0 . \quad (15)$$