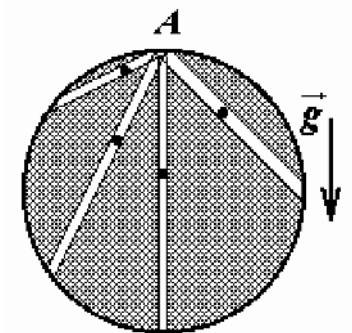
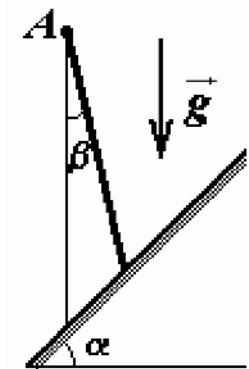


Условие

3. (7 баллов) В вертикально расположенном диске проделаны прорезы, начинающиеся в верхней точке диска A , по которым могу скользить без трения небольшие бруски. Покажите, что времена соскальзывания брусков (без начальной скорости) по всем желобкам одинаковы.



Точка A находится над наклонной плоскостью, составляющей угол α с горизонтом. Из точки A необходимо опустить прямой желоб на наклонную плоскость. Под каким углом β к вертикали необходимо опустить этот желоб, чтобы время соскальзывания бруска на плоскость было минимальным?



Решение

10.3 Обозначим поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора σ_0 , а на поверхности пластины σ' (обе эти величины зависят от времени). Так как внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало, то в любой момент времени разность потенциалов между обкладками конденсатора будет равна напряжению источника. Поэтому в любой момент времени справедливо соотношение

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}h + \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}h = U, \quad (1)$$

где $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}$ - напряженности электрических полей между пластиной и обкладками и внутри пластины, соответственно. Сразу после подключения источника на пластине возникнут поляризационные заряды, такие, что поле внутри пластины будет в ε раз меньше поля вне ее, то есть

$$\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Из этих соотношений находим, что плотность зарядов на обкладке конденсатора будет равной

$$\sigma_0^{(0)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 U}{h}, \quad (3)$$

следовательно, в начальный момент времени заряд пластины будет равен

$$Q_0 = S\sigma_0^{(0)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 U S}{h}. \quad (4)$$

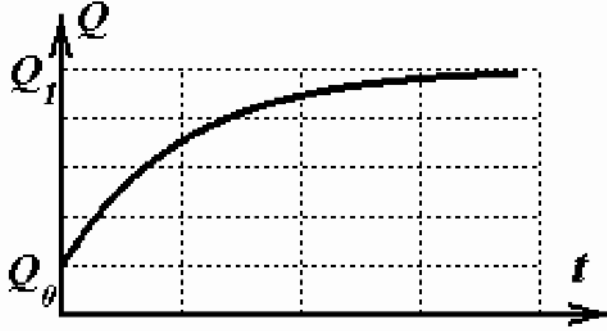
Однако, пластина слабо, но проводит электрический ток. Поэтому внутри пластины ток будет течь до тех пор, пока поле внутри пластины не исчезнет. Это произойдет при $\sigma_0 = \sigma'$. В этом случае из соотношения (1) следует

$$\sigma_0^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 U}{h}, \quad (3)$$

соответствующий заряд на обкладке примет значение

$$Q_1 = S\sigma_0^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 U S}{h}. \quad (4)$$

Таким образом, заряд на пластине будет монотонно возрастать от Q_0 до Q_1 .



Изменение поверхностной плотности заряда обусловлено током внутри пластины. Плотность этого тока может быть найдена по закону Ома

$$j = \frac{\Delta\sigma'}{\Delta t} = \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\rho\varepsilon_0}. \quad (5)$$

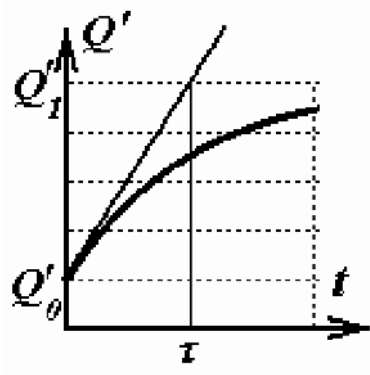
Плотность тока максимальна, когда максимально поле внутри пластины, то есть в начальный момент времени, когда

$$j_{max} = \frac{\Delta\sigma'}{\Delta t} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\rho\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\rho\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{U}{h\rho(\varepsilon + 1)}, \quad (6)$$

следовательно, максимальная сила тока

$$I_{max} = j_{max}S = \frac{US}{h\rho(\varepsilon + 1)}, \quad (6)$$

Строго говоря, время установления равновесия зарядов на пластине и обкладках конденсатора равно бесконечности, так как сила тока в соответствии с формулой (5) монотонно убывает. Однако характерное время зарядки конденсатора τ мы можем получить, считая силу тока постоянной и равной I_{max} . Этот метод получения оценки иллюстрирует следующий рисунок.



Изменение заряда легко подсчитать - в начальный момент времени заряд поверхности пластины

$$Q'_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 U S}{h}, \quad (7)$$

а его конечное значение

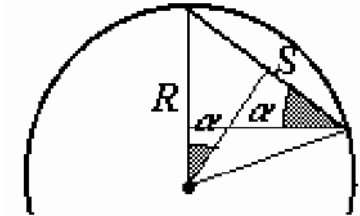
$$Q'_1 = Q_0 = \frac{\varepsilon_0 U S}{h}. \quad (8)$$

Итак, оценка характерного времени заряда имеет вид

$$\tau = \frac{Q'_1 - Q'_0}{I_{max}} = 2\rho\varepsilon_0. \quad (9)$$

10.3 Рассмотрим скольжение тела по произвольной прорези, образующей угол α с горизонтом. Ускорение тела, движущегося по наклонной плоскости без трения, определяется известной формулой

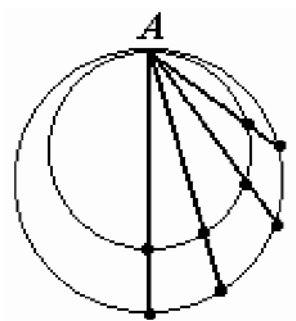
$$a = g \sin \alpha. \quad (1)$$



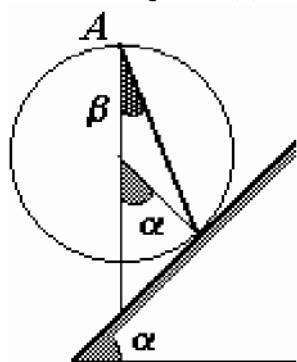
Длину этой прорези также не трудно найти: отмеченные на рисунке углы равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, длина прорези равна $S = 2R \sin \alpha$. Используя закон равноускоренного движения $S = \frac{at^2}{2}$, найдем время движения

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}, \quad (2)$$

которое не зависит от угла α , следовательно, одинаково для всех прорезей.



Воспользуемся полученным результатом для решения второй части задачи. Представим, что из точки A одновременно по разным наклонным плоскостям начали скользить малые тела. Согласно ранее доказанному в любой момент времени они будут находиться на



одной окружности, радиус которой постоянно растет. Тогда первым достигнет наклонной плоскости тот брусок, который находится в точке касания окружности, касательной к плоскости. С помощью рисунка легко доказать, что искомый угол желоба с вертикалью равен половине угла α , то есть $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

