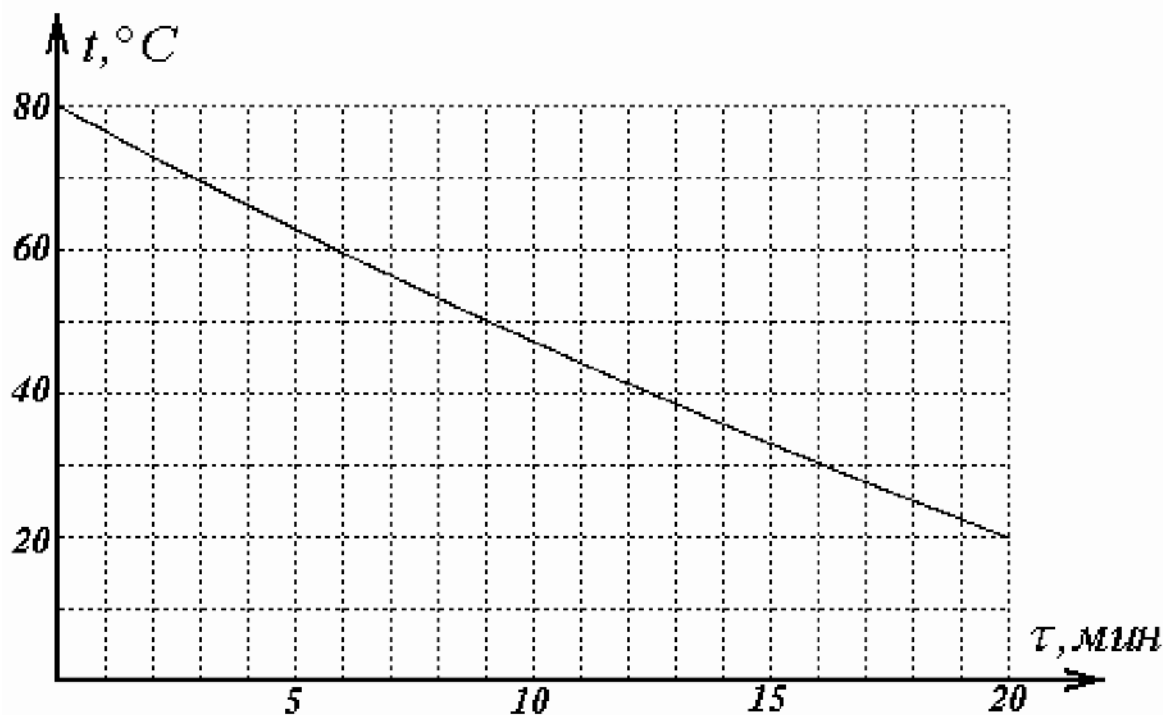


Условие

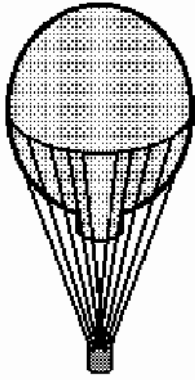
5. (**13 баллов**). Воздушный шар-зонд наполняют воздухом, нагретым до температуры $t_0 = 90^\circ\text{C}$. Конструкция шара такова, что его объем $V = 130\text{ м}^3$ все время остается постоянным, а давление воздуха в шаре равно атмосферному. Суммарная масса оболочки и груза равна $m = 6,0\text{ кг}$. Шар запускают с поверхности земли в безветренную погоду: температура воздуха $t_a = 15^\circ\text{C}$, атмосферное давление $p_a = 1,0 \cdot 10^5\text{ Па}$. Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Сразу после запуска скорость шара стала равной $v_0 = 0,35 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Температура воздуха t внутри шара уменьшается со временем τ по закону, представленному на графике. Определите по этим данным максимальную высоту подъема шара. Считайте, что температура и давление атмосферы от высоты не зависят. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна его скорости.



Успехов Вам!

Белорусская республиканская физическая олимпиада Барановичи, 2001 год





Решение

10.5 При подъеме шара, на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, подъемная сила Архимеда $\vec{F}_A$, сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta\vec{v}$, пропорциональная скорости подъема. Следовательно, уравнение второго закона Ньютона для шара будет иметь вид

$$ma = F_A - mg - \beta v. \quad (1)$$

Так как шар движется в воздухе достаточно медленно, то можно считать, что в любой момент времени сила сопротивления уравновешивает разность сил Архимеда и тяжести. Иными словами, можно пренебречь инерционными эффектами и положить $ma = 0$. Тогда из уравнения (1) получим выражение для скорости подъема

$$\beta v = F_A - mg. \quad (2)$$

Подъемная сила вычисляется по формуле

$$F_A = Vg(\rho_0 - \rho), \quad (3)$$

где ρ_0, ρ - плотности холодного (наружного) и теплого (внутри шара) воздуха. Эти плотности можно выразить из уравнения состояния идеального газа $PV = \frac{m}{M}RT$:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (4)$$

Используя формулы (3)-(4), получаем выражение для скорости подъема

$$\beta v = Vg \frac{PM}{R} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right) - mg. \quad (5)$$

Неизвестный коэффициент β можно получить из аналогичной формулы для начальной скорости. Таким образом, окончательное выражение для скорости подъема принимает «несколько угрожающий» вид

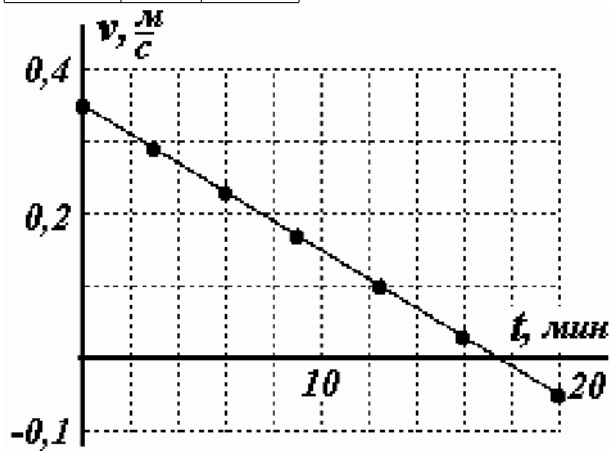
$$v = \frac{Vg \frac{PM}{R} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right) - mg}{Vg \frac{PM}{R} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_0} \right) - mg}. \quad (6)$$

По этой формуле с помощью приведенного в условии графика зависимости температуры от времени можно построить зависимость скорости подъема от времени. Для ускорения последующих расчетов в формуле (6) необходимо провести промежуточные вычисления (приведя все величины в систему СИ) и привести ее к виду, пригодному для расчетов

$$v = 2,305 - \frac{690}{273 + t^{\circ}}, \quad (7)$$

где t° - температура внутри шара, измеренная по шкале Цельсия. Результаты расчетов приведены в таблице и на графике.

τ , мин	$t^{\circ}C$	v , $\frac{м}{с}$
0	80	0,39
3	70	0,29
6	60	0,23
9	50	0,17
12,5	40	0,10
16	30	0,03
20	20	-0,05



Таким образом, мы получили, что скорость подъема убывает по линейному закону. Время подъема составляет примерно $\tau \approx 18$ мин. Следовательно, высота подъема $H = \frac{v_0 \tau}{2} \approx 190$ м.

