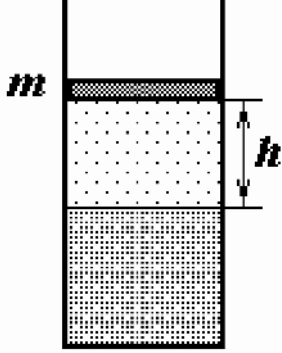


Условие

2. В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится углекислый газ и газированная вода (раствор углекислого газа в воде). Поршень плотно пригнан к стенкам сосуда и может скользить вертикально без трения. При массе поршня m_0 он находится в равновесии на расстоянии h_0 от поверхности воды, при увеличении массы поршня до величины m_1 он опускается до расстояния h_1 . Какова должна быть масса поршня, чтобы он достиг поверхности воды? Все процессы считать изотермическими. Изменением объема жидкости при растворении газа, испарением воды и атмосферным давлением можно пренебречь. *Примечание. Растворимость газов пропорциональна внешнему парциальному давлению этого газа над поверхностью жидкости (закон Генри).*



Решение

11.2 Давление газа, находящегося между жидкостью и поршнем, пропорционально массе последнего $P = \frac{mg}{S}$, где S - площадь поперечного сечения сосуда. По закону Генри, количество углекислого газа, растворенного в воде, пропорционально этому давлению $\nu_s = \alpha V P$ (где V - объем жидкости в сосуде), следовательно, количество газа между поршнем и жидкостью зависит от давления по закону $\nu = \nu_0 - \alpha V P$, где ν_0 - общее количество углекислого газа в сосуде. Записывая уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в свободном состоянии

$$\frac{mg}{S} h S = \left(\nu_0 - \alpha V \frac{mg}{S} \right) R T, \quad (1)$$

видим, что масса поршня и высота столба газа связаны соотношением

$$mh = a - bm, \quad (2)$$

где a, b - некоторые постоянные величины, которые легко выразить через заданные в условии данные

$$\begin{cases} m_0 h_0 = a - b m_0 \\ m_1 h_1 = a - b m_1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m_1 m_0}{m_1 - m_0} (h_0 - h_1); \quad b = \frac{m_0 h_0 - m_1 h_1}{m_1 - m_0}.$$

Поршень достигнет жидкости (весь газ растворится в воде), при массе поршня

$$m = \frac{a}{b} = \frac{m_1 m_0 (h_0 - h_1)}{m_0 h_0 - m_1 h_1}. \quad (3)$$

3. Представим сигнал в виде суммы трех гармонических составляющих

$$E = E_0 \cos \omega_0 t (1 + a \cos \omega_1 t) =$$

$$= E_0 \cos \omega_0 t + \frac{aE_0}{2} \cos(\omega_0 - \omega_1)t + \frac{aE_0}{2} \cos(\omega_0 + \omega_1)t. \quad (1)$$

Распространение монохроматической волны в пространстве вдоль оси x описывается функцией

$$E(t, x) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \right), \quad (2)$$

где c - скорость распространения волны с частотой ω . Применим эту формулу к сигналу (1), учитывая формулу для скорости распространения волн

$$E(t, x) = E_0 \cos \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c_0} x \right) \omega_0 t + \\ + \frac{aE_0}{2} \cos \left((\omega_0 - \omega_1)t - \frac{(\omega_0 - \omega_1)x}{c_0 + \gamma\omega_1} \right) + \frac{aE_0}{2} \cos \left((\omega_0 + \omega_1)t - \frac{(\omega_0 + \omega_1)x}{c_0 - \gamma\omega_1} \right)$$

Далее упростим это выражение, используя малость величин $\frac{\omega_1}{\omega_0}, \frac{\gamma\omega_1}{c_0} \ll 1$. Тогда

$$\frac{(\omega_0 - \omega_1)x}{c_0 + \gamma\omega_1} = \frac{x\omega_0}{c_0} \cdot \frac{1 - \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 + \gamma\frac{\omega_1}{c_0}} \approx \frac{x\omega_0}{c_0} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} - \gamma\frac{\omega_1}{c_0} \right); \\ \frac{(\omega_0 + \omega_1)x}{c_0 - \gamma\omega_1} \approx \frac{x\omega_0}{c_0} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma\frac{\omega_1}{c_0} \right);$$

Воспользуемся теперь обратным преобразованием от суммы косинусов к их произведению

$$E(t, x) = E_0 \cos \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c_0} x \right) \left(1 + a \cos \left(\omega_1 t - \frac{\omega_0}{c_0} x \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma\frac{\omega_1}{c_0} \right) \right) \right).$$

Скорость распространения сигнала можно найти из условия постоянства фазы (полагая ее равной, например, нулю). Окончательно получаем, что искомая скорость распространения огибающей (полезного сигнала)

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\omega_1}{\frac{\omega_0}{c_0} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma\frac{\omega_1}{c_0} \right)} = \frac{c_0}{1 + \gamma\frac{\omega_0}{c_0}} \approx c_0 \left(1 - \gamma\frac{\omega_0}{c_0} \right).$$