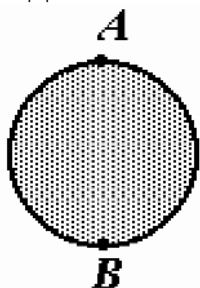


Условие
Задача 2.

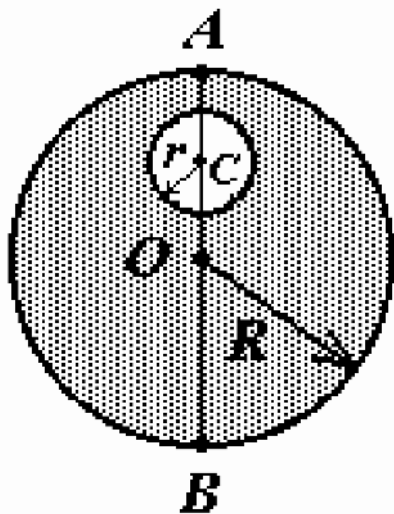


В глубинах Вселенной был обнаружен однородный астероид сферической формы радиуса R , состоящий из редких химических элементов. Измерения с помощью высокоточного гравиметра (прибора для измерения величины ускорения свободного падения g) показали, что ускорение свободного падения во всех точках на его поверхности было одинаково по модулю $|\vec{g}| = g_0$. В результате добычи полезных ископаемых внутри астероида в некотором месте образовалась сферическая полость, не выходящая на его поверхность. Повторные измерения с помощью высокоточного гравиметра показали, что вследствие разработки астероида значения g изменились: минимальное ускорение свободного падения на его поверхности $g_{\min} = 0,938 g_0$ достигается в некоторой точке A (уменьшение g составило $\eta_1 = 6,2\%$), а максимальное значение $g_{\max} = 0,993 g_0$ — в диаметрально противоположной точке B на его поверхности (уменьшение g составило $\eta_2 = 0,70\%$.) Определите по этим данным положение и глубину залегания a центра полости, а также ее радиус r .

Решение

Задача 2.

Решение: наименьшее значение ускорения свободного падения $g_{\min} = 0,938 g_0$ на поверхности астероида достигается в точке, где верхний край полости подходит к поверхности астероида ближе всего. Следовательно, центр полости (точка C на рисунке) расположен на отрезке AO на некоторой неизвестной глубине $AC = a$, где точка O — центр однородного астероида.



Масса изъятая из астероида в процессе разработки породы $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, где ρ — плотность вещества

астероида, r — искомый радиус полости. Для решения задачи мысленно «добавим» выработанную породу обратно. Тогда на всей поверхности астероида должно «восстановится»

прежнее значение ускорения свободного падения — g_0 . Но с другой стороны для точки A можем записать

$$g_0 = g_{min} + \Delta g_A,$$

где Δg_A — ускорение, создаваемое добавленной массой. С учетом закона гравитации Ньютона получаем

$$\Delta g_A = G \frac{4/3\pi r^3 \rho}{a^2}.$$

Аналогичное равенство можно записать и для точки B астероида

$$g_0 = g_{max} + \Delta g_B,$$

где $\Delta g_B = G \frac{4/3\pi r^3}{(2R-a)^2}$. Таким образом, для нахождения глубины залегания центра полости a и ее радиуса r имеем систему уравнений

$$g_{min} = g_A = \frac{4}{3}G\pi\rho(R - \frac{r^3}{a^2}) \quad (1)$$

$$g_{max} = g_B = \frac{4}{3}G\pi\rho(R - \frac{r^3}{(2R-a)^2}). \quad (2)$$

Выражая из первого уравнения

$$r^3 = \frac{3}{4G\pi\rho}a^2(g_0 - g_{min})$$

и подставляя полученное значение во второе уравнение, найдем

$$a = 2R \frac{\sqrt{g_0 - g_{max}}}{\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}}} = 2R \frac{\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1}}. \quad (3)$$

Соответственно, для радиуса полости имеем

$$r = R \sqrt[3]{\frac{4(g_0 - g_{max})(g_0 - g_{min})}{g_0(\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}})^2}} = R \sqrt[3]{\frac{4\eta_2\eta_1}{(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1})^2}}. \quad (4)$$

Подставляя в (3) и (4) числовые данные, находим

$$a = 0,503R \approx \frac{R}{2}; \quad r = 0,250R \approx \frac{R}{4}.$$