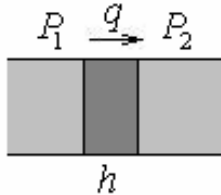


Проницаемость

Условие

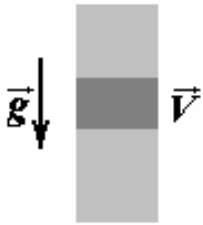
Задание 1. «Проницаемость»***

В данном задании рассматривается движение жидкости через пористую среду. Среда характеризуется пористостью $\eta = \frac{V_{\text{пор}}}{V_0}$ - отношением объема пор $V_{\text{пор}}$ к объему среды (вместе с порами) V_0 . Масса жидкости q , протекающая в единицу времени через площадку единичной площади (массовая плотность потока) сквозь слой среды толщиной h при разности давлений между сторонами слоя ΔP определяется законом Дарси



$$q = \beta \frac{P_1 - P_2}{h},$$

где β - коэффициент проницаемости среды, зависящий также от свойств протекающей жидкости. При решении задачи можно пренебречь капиллярными явлениями. И еще: может поможет - при малых изменениях $2x\Delta x = \Delta(x^2)$



Рассмотрим протекание воды через слой крупнозернистого песка. Пористость песка η и проницаемость воды β через этот песок, плотность воды ρ известны. 1. Выразите размерность проницаемости β через основные единицы системы СИ. 2. В очень толстом слое песка находится горизонтальный слой воды. Чему равна скорость движения этого слоя через песок? 3. На горизонтальную поверхность толстого слоя песка наливают слой воды толщиной h_0 , которая начинает впитываться в песок. Найдите зависимость толщины слоя воды над поверхностью песка от времени. Через какое время вся вода «уйдет» в песок? 4. В широкой вертикальной трубке расположен слой песка, удерживаемый снизу пористой перегородкой, влиянием которой на движение жидкости можно пренебречь. Толщина слоя песка равна h_0 . Сверху на песок наливают воду, толщина слоя которой равна h_1 , причем ($\eta h_1 > h_0$). За какое время вся вода протечет через трубку?

Решение

Задание 10.1*** 1. Из формулы закона Дарси следует, что размерность проницаемости – секунда.

Пусть слой воды толщиной h движется горизонтально через песок под действием разности давлений ΔP . Так как вода движется равномерно, то сумма внешних сил, действующих на воду равна нулю. Следовательно, сила сопротивления действующая на воду со стороны песка, равна $f_c = \Delta P S$, где S площадь произвольно выделенной части движущегося слоя. Эту силу можно также выразить из приведенного закона Дарси $\Delta P S = \frac{h S}{\beta} q$. Наконец, поток жидкости можно выразить через ее скорость v : $q = \eta \rho v$. Итак, сила сопротивления, действующая на

выделенную часть слоя, определяется формулой

$$f_c = \frac{\eta\rho}{\beta} Shv. \quad (1)$$

2. При вертикальном движении слоя жидкости в пористой среде сила тяжести уравновешивается силой сопротивления, поэтому

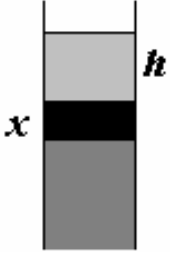
$$\eta\rho Shg = \frac{\eta\rho Sh}{\beta} v. \quad (2)$$

Откуда следует, что скорость равномерного движения слоя воды равна

$$v = \beta g. \quad (3)$$

3. Не смотря на то, что скорость движения воды будет изменяться, будем считать, что эти изменения малы. Поэтому в любой момент времени сумма сил, действующих на воду, будет равна нулю (используем традиционное квазистационарное приближение). Обозначим высоту слоя не впитавшейся воды h , а толщину намокшего песка x . Учитывая, что сила тяжести, действующая на всю воду, уравновешивается силой сопротивления, действующей только на слой воды, находящейся в песке, запишем выражения для равенства этих сил

$$\rho Sh_0 g = \frac{\eta\rho Sx}{\beta} v. \quad (4)$$



Так как $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, то из уравнения (4) следует

$$x = \sqrt{\frac{2h_0\beta g}{\eta}} t. \quad (5)$$

Запишем условие сохранения количества воды

$$\rho h + \eta\rho x = \rho h_0, \quad (6)$$

которое позволяет найти искомую зависимость толщины слоя не впитавшейся воды от времени

$$h = h_0 - \sqrt{2h_0\beta g\eta} t. \quad (7)$$

Полагая $h = 0$, найдем время впитывания

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g}, \quad (8)$$

3. Так как скорость движения жидкости внутри песка не зависит от его толщины, то после полного впитывания верхняя граница «мокрого» слоя будет постоянна и определяться формулой (3). Следовательно, вся вода пройдет через слой песка за время

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g} + \frac{h_1}{\beta g}. \quad (9)$$