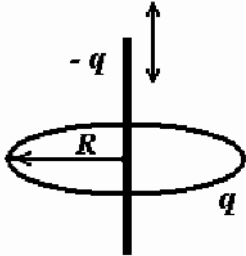


Колебания стержня

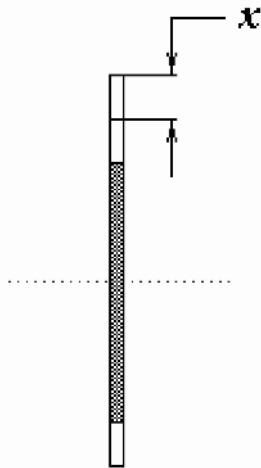
Условие

Задание 3. «Колебания стержня» По тонкому закрепленному кольцу радиуса R равномерно распределен заряд q . Вдоль оси кольца может двигаться без трения однородный тонкий стержень с зарядом $-q$ и длиной $l = 2R$, масса которого m . Найдите период малых колебаний стержня в электрическом поле кольца. *Силой тяжести пренебречь.**



Решение

Задание 10.3



Поскольку кольцо и стержень имеют заряды противоположных знаков, то в положении равновесия стержень расположится симметрично относительно центра кольца. Рассмотрим малое смещение x ($x \ll R$) стержня из положения равновесия например вверх (рис. 2). Поскольку при этом над кольцом окажется большая часть стержня, то результирующая сила со стороны кольца будет стремиться вернуть стержень в положение равновесия.

Для расчета этой силы заметим, что в данном случае «нескомпенсированной» остается только сила притяжения к кольцу малого участка стержня длиной $2x$ (незаштрихованная на рис.), имеющая заряд

$$\Delta q = \lambda 2x = \frac{q}{l} 2x = \frac{q}{R} x. \quad (1)$$

Поскольку напряженность электростатического поля на оси кольца на расстоянии h от его центра вычисляется по формуле

$$E(h) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

то для нашего случая ($h = R$) получаем

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение движения (второй закон Ньютона) для стержня примет вид

$$ma = mx''(t) = -\Delta q \cdot E(R) = -\frac{q}{R} \cdot \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot x = -\frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot x. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать в виде стандартного уравнения гармонических колебаний

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R^3}} = \frac{q}{2R} \cdot \frac{l}{\sqrt{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R}}. \quad (5)$$

Соответственно период данных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi R}{q} \sqrt{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R}. \quad (6)$$