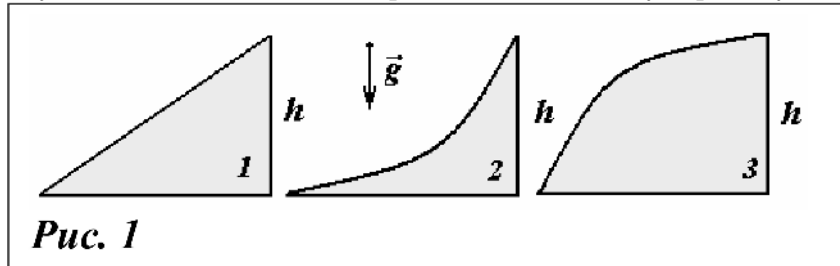


Калейдоскоп

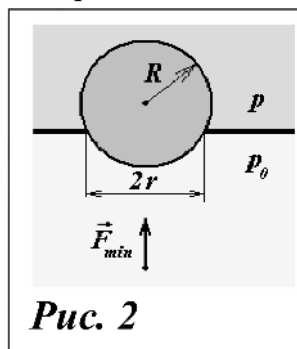
Условие

Задание 10-1. «Калейдоскоп»

1.1 «Масленица» Мальчик медленно втаскивает небольшие санки массой $m = 5,0$ кг на горки 1, 2 и 3 (рис. 1) одинаковой высоты $h = 10$ м, но различных профилей. В каком из случаев сила тяжести совершит максимальную работу $A_{\max}$? Чему она равна?



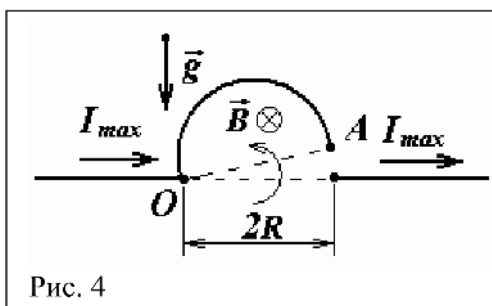
Ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



1.2 «Паровой клапан» Для вывода «избыточного» пара из скороварки применяется клапан в виде шарика радиуса $R = 1,0$ см, перекрывающего отверстие радиуса $r = 7,0$ мм (рис. 2). Давление пара в скороварке постоянно и равно $p = 2,5p_0$, где $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па — нормальное атмосферное давление. Найдите минимальную силу $\vec{F}_{\min}$, с помощью которой можно открыть (вдавить) клапан для выхода избыточного пара из скороварки. Изменится ли ответ, если клапан будет иметь форму, отличную от сферической?

1.3 «Дождевое сопротивление» Оцените силу сопротивления, которую оказывает дождь на движущийся автомобиль, показанный на фотографии рядом с водителем. Считайте, что капли дождя падают вертикально, интенсивность дождя $30 \frac{\text{мм}}{\text{час}}$, скорость автомобиля $60 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, рост водителя — 180 см.



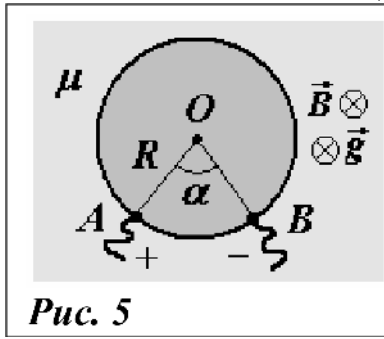


1.4 «Магнитный ограничитель тока» Для размыкания электрической цепи при увеличении силы тока применяется подвижное тонкое полукольцо ОА (рис. 12) массы $m = 3,0$ г радиуса $R = 1,0$ см, которое может свободно (без трения) вращаться в вертикальной плоскости относительно точки О. Система находится в однородном горизонтальном магнитном поле индукции $B = 1,5$ мТл, перпендикулярном плоскости рисунка. Найдите максимальную силу тока

I_{max} , при которой ограничитель разомкнет цепь. Ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.5 «Магнитный толкатель» На горизонтальной плоскости лежит тонкий однородный диск массы $m = 3,0$ г радиуса $R = 3,5$ см, коэффициент трения которого о плоскость —

$\mu = 0,20$. К боковой поверхности диска припаяны гибкие легкие контакты $A (+)$ и $B (-)$, так, что угол $\widehat{AOB} = \alpha = 90^\circ$ (рис. 5).



Система находится в однородном вертикальном магнитном поле индукции $B = 1,5$ мТл. При какой минимальной силе тока $I_{\min}$ через контакты диск сдвинется с места? В каком направлении это произойдет? Ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Решение

Задание 10-1. «Калейдоскоп»

1.1 «Масленица» Поскольку гравитационные силы являются потенциальными, то их работа не зависит от траектории, а определяется только конечным и начальным положением материальной точки. Следовательно, во всех трех случаях сила тяжести совершит одинаковую работу

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_{\max} = mgh = 4,9 \cdot 10^2 \text{ Дж} = 0,49 \text{ кДж}.$$

1.2 «Паровой клапан» На достаточно малый элемент поверхности шарика площадью ΔS_i , который можно считать участком плоскости, со стороны сплошной среды (в данном случае пара) действует нормальная элементарная сила давления $\vec{F}_i$, модуль которой

$$F_i = p \Delta S_i, \quad (1)$$

где p — давление сплошной среды вблизи рассматриваемого участка поверхности. Для нахождения результирующей силы давления $\vec{F}_D$ со стороны пара следует векторно просуммировать элементарные силы давления $\vec{F}_i$

$$\vec{F}_D = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i. \quad (2)$$

В силу симметрии задачи можем заметить, что вектор $\vec{F}_D$ направлен нормально границе раздела сред, поэтому для нахождения его модуля достаточно просуммировать только нормальные компоненты векторов $\vec{F}_{i\perp}$, которые перпендикулярны границе раздела

$$F_D = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} p \Delta S_i \cos \alpha_i = p \sum_{i=1}^{\infty} \Delta S_i \cos \alpha_i. \quad (3)$$

Заметим, что сумма (3) представляет собой сумму площадей проекций элементарных площадок ΔS_i на границу раздела сред. Следовательно, независимо от формы поверхности пробки она всегда будет равна площади отверстия S_o

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta S_i \cos \alpha_i = S_o = \pi r^2. \quad (4)$$

Иными словами сила давления, действующая на рассматриваемую поверхность произвольной формы равна по модулю и противоположна по направлению силе давления той же сплошной среды на плоскую поверхность отверстия. Данное обстоятельство позволяет легко найти искомую силу $\vec{F}_{min}$

$$F_{min} = p\pi r^2 - p_0\pi r^2 = (p - p_0)\pi r^2 = 1,5p_0\pi r^2 = 23 \text{ Н.} \quad (5)$$

Как следует из (5), ответ не зависит от радиуса шарика R , главное, чтобы он был «достаточно» для перекрытия отверстия, иначе шарик будет просто выброшен из скороварки силами давления пара. Результат (5) не изменится, если клапан будет иметь форму, отличную от сферической.

1.3 «Дождевое сопротивление» Сила сопротивления возникает вследствие того, что при движении со скоростью $v = 16,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ автомобиль «заметает» некоторое количество ΔN капель за промежуток времени Δt , причем каждая капля «несет» с собой определенный импульс $\vec{p}_0$. Будем считать, что соударение капли с автомобилем носит неупругий характер, т.е. попав на автомобиль, далее капля движется вместе с ним (покоится относительно него). В системе отсчета, связанной с автомобилем, капли движутся вертикально со скоростью $u = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и горизонтально (навстречу автомобилю) со скоростью v . Пусть концентрация капель в дождевом потоке — n , масса одной капли — m_0 , площадь поперечного сечения автомобиля (в направлении движения) — S . Тогда количество капель, попавших на автомобиль за время Δt

$$N = nV = nSv\Delta t. \quad (1)$$

Соответственно горизонтальный импульс этих капель (в системе отсчета, связанной с автомобилем)

$$p_x = m_0v \cdot N = m_0nSv^2\Delta t. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме сила представляет собой «скорость изменения импульса»

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{p_x - 0}{\Delta t} = \frac{p_x}{\Delta t} = \{(2)\} = m_0nSv^2. \quad (3)$$

Интенсивность дождя $I = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ также может быть выражена из элементарных соображений. Действительно, за время Δt в неподвижное вертикальное метеорологическое мерное ведро площадью поперечного сечения S^* попадет количество капель

$$N = nV = nS^*u\Delta t. \quad (4)$$

Это вызовет подъем уровня жидкости в ведре на величину

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S^*} = \frac{m_0N}{\rho S^*} = \frac{m_0nS^*u\Delta t}{\rho S^*} = \frac{m_0nu\Delta t}{\rho}, \quad (5)$$

где ρ — плотность воды. Соответственно, для интенсивности дождя получаем

$$I = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{m_0nu}{\rho} \Rightarrow m_0n = \frac{\rho I}{u}. \quad (6)$$

Таким образом, окончательное выражение для силы дождевого сопротивления приобретает вид

$$F_x = \frac{\rho I}{u} S v^2. \quad (7)$$

Величину площади S поперечного сечения автомобиля в направлении движения оценим из рисунка (для этого по периметру рисунка нанесена специальная градуировочная шкала) $S \approx 1,5 \text{ м}^2$. Окончательно

$$F_x = \frac{\rho I}{u} S v^2 = 0,35 \text{ Н}. \quad (8)$$

Столь неожиданно малое значение оценки для F_x объясняется малой интенсивностью дождя (т.н. «грибной» дождь) и сравнительно небольшой скоростью автомобиля.

1.4 «Магнитный ограничитель тока» На достаточно малый элемент полукольца длиной Δl_i , который можно считать отрезком, действует сила Ампера $\vec{F}_i$

$$F_i = IB \Delta l_i. \quad (1)$$

Сила Ампера $\vec{F}_j$, действующая на симметричный элемент кольца Δl_j , имеет такую же величину, поскольку в силу симметрии $\Delta l_i = \Delta l_j$. Момент этой пары сил M_{i+j} относительно точки O

$$M_{i+j} = 2F_i R \cos \alpha_i = 2IB \Delta l_i R \cos \alpha_i = (2IBR) \Delta l_i \cos \alpha_i \quad (2)$$

Соответственно, суммарный момент всех элементарных сил Ампера $\vec{F}_i$ относительно точки O , поднимающий полукольцо вверх, найдем суммированием (2) по всем парам $(i + j)$

$$M = \sum_{i+j}^{\infty} (2IBR) \Delta l_i \cos \alpha_i = IBR \sum_{i+j}^{\infty} 2 \Delta l_i \cos \alpha_i. \quad (3)$$

Сумма в (3) представляет собой сумму длин проекций пар элементарных участков на диаметр OA , т.е.

$$M = IBR \sum_{i+j}^{\infty} 2 \Delta l_i \cos \alpha_i = IBR (2R) = 2IBR^2. \quad (4)$$

Ограничитель «сработает» (т.е. разомкнет цепь) при такой силе тока I_{max} , когда момент сил Ампера сравняется с моментом силы тяжести относительно точки O

$$mgR = 2I_{max}BR^2 \Rightarrow I_{max} = \frac{mg}{2BR} = 9,8 \cdot 10^2 \text{ А} = 0,98 \text{ кА}. \quad (5)$$

1.5 «Магнитный толкатель» Как следует из предыдущего пункта, сила Ампера, действующая на провод произвольной формы равна по модулю силе Ампера, действующей на отрезок, соединяющий его начальную и конечную точки. Построить картину распределения элементарных токов I_i по диску достаточно сложно, однако в силу предыдущего замечания для ответа на вопрос задачи этого и не требуется, поскольку все они начинаются в точке A и заканчиваются в точке B . Следовательно, для нахождения результирующей силы Ампера можно считать, что от точки A к точке B течет прямой ток I_{min} . Теперь понятно, что диск сдвинется с места по направлению действия силы Ампера, т.е. по нормали к отрезку AB в направлении к центру окружности. Это произойдет после того, как сила Ампера превысит по модулю силу трения покоя (на рис. $\alpha = 80^\circ$)

$$I_{min} B \left(2R \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \mu mg \Rightarrow I_{min} = \frac{\mu mg}{2BR \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{56}{\sin 45^\circ} (A) = 79 A.$$

Решение 10.2. *«Смещение и затухание»***

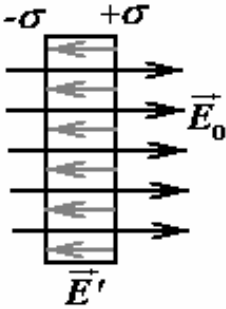
2.1. Выразите частоту ν_0 колебаний шарика через массу шарика и жесткость пружины.
Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -kx, \quad (1)$$

из которого непосредственно следует формула для частоты

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

2.2. Получите выражение для силы $F_e(z)$, действующей на неподвижный шарик со стороны диска, как функцию его расстояния до центра диска z (для $z \gg r$).



Электрическое поле внутри проводящего диска должно отсутствовать. Под действием поля $\vec{E}_0$ точечного заряда q на поверхности диска будут индуцироваться заряды с поверхностной плотностью $\pm\sigma$, которые будут создавать поле $\vec{E}'$, равное по величине и противоположное по направлению поля точечного заряда. Учитывая, что размеры диска малы по сравнению с расстоянием до заряда, можно пренебречь изменением вектора напряженности $\vec{E}_0$ в пределах диска. Поэтому и поле $\vec{E}'$ следует считать однородным, а поверхностную плотность индуцированных зарядов постоянной.

Напряженность поля точечного заряда определяется формулой $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, а напряженность поля индуцированных зарядов связана с их поверхностной плотностью соотношением $E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Приравнявая эти величины, определим поверхностную плотность индуцированных зарядов $\sigma' = \frac{q}{4\pi z^2}$, и величину индуцированного заряда на одной стороне диска $q' = \sigma' S = \frac{qS}{4\pi z^2}$, (где $S = \pi r^2$ - площадь диска).

Интересно отметить, что индуцированный дипольный момент диска равен $p' = q'h = \frac{qSh}{4\pi z^2} = \frac{q}{4\pi z^2} V$. Из сравнения с традиционным выражением для этой величины $p = \alpha\epsilon_0 E_0$ следует, что поляризуемость диска в точности равна его объему.

Теперь с помощью закона Кулона легко найти силу, действующую на точечный заряд со стороны двух индуцированных зарядов (который на большом расстоянии также можно считать точечными)

$$F_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+h)^2} \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z+h)^2 - z^2}{z^2(z+h)^2}.$$

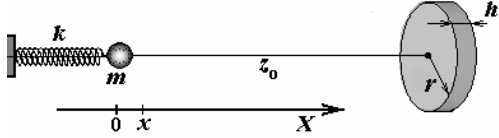
Учитывая, что $h \ll z$, окончательно получим

$$F_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z+h)^2 - z_0^2}{z^2(z+h)^2} \approx \frac{qq'h}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z^3} \cdot \frac{q}{4\pi z^2} V = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z^5}. \quad (3)$$

где $V = \pi r^2 h$ - объем диска.

2.3. Получите формулу для определения максимального заряда шарика, при котором он может совершать колебательное движение.

Необходимым и достаточным условием возможности колебаний является наличие положения устойчивого равновесия.



Условию равновесия соответствует равенство сил упругости и электростатического взаимодействия (3), то есть для координаты точки равновесия справедливо уравнение

$$kx = \frac{q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 (z_0 - x)^5}. \quad (4)$$

Это уравнение является алгебраически уравнением шестой степени, поэтому не может быть решено элементарными методами. Преобразуем уравнение к виду

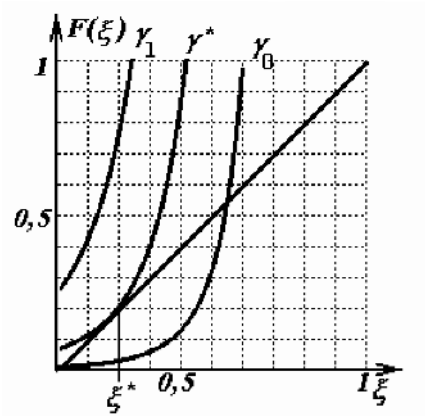
$$kz_0 \frac{x}{z_0} = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_0^5 \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^5},$$

обозначим $\xi = \frac{x}{z_0}$ и введем безразмерный параметр рассматриваемой системы

$$\gamma = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_0^5 (kz_0)}. \quad (5)$$

В этих обозначениях уравнение (4) имеет простой вид

$$\xi = \frac{\gamma}{(1 - \xi)^5}. \quad (6)$$



Колебания шарика возможны до тех пор, пока существует положение устойчивого равновесия. Иными словами, пока уравнение (6) имеет решения на интервале $0 \leq \xi \leq 1$. Функция $F(\xi) = \frac{\gamma}{(1-\xi)^5}$ резко возрастает при приближении аргумента к единице. При малых значениях

параметра γ эта функция имеет две точки пересечения с прямой $F = \xi$ (то есть имеется два корня уравнения), при больших значениях γ корней нет – на рисунке $\gamma_1 > \gamma_0$.

Из анализа зависимостей сил упругости и электрического притяжения следует, что меньший корень соответствует положению устойчивого положения равновесия, а больший неустойчивого. «Критическим» значением является такое значение γ^* , при котором прямая $F = \xi$ касается графика функции $F(\xi)$ в одной точке ξ^* . Таким образом, в этой точке производная от этой функции должна равняться $F'(\xi) = 1$. Итак, для определения этого значения имеем два уравнения

$$\xi^* = \frac{\gamma^*}{(1 - \xi^*)^5}; \quad 1 = \frac{5\gamma^*}{(1 - \xi^*)^6},$$

Разделив первое из них на второе, получим $\xi^* = \frac{1 - \xi^*}{5}$, откуда следует $\xi^* = \frac{1}{6}$, а искомое значение параметра выражается «очень красиво»

$$\gamma^* = \xi^* \cdot (1 - \xi^*)^5 = \frac{5^5}{6^6} \approx 0,067.$$

Используя выражение для параметра (5), находим максимальное значение заряда

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{5^5}{6^6} \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 z_0^5 (kz_0)}{V}}. \quad (7)$$

Возможен еще один способ определения условия существования корней уравнения (6). Преобразуем это уравнение к виду

$$\xi(1 - \xi)^5 = \gamma.$$

Ясно, что это уравнение будет иметь корни, если максимум функции $f(\xi) = \xi(1 - \xi)^5$ превышает значение параметра γ . Этот метод приводит к тому конечному результату.

****2.4.** Чему равно относительное смещение положения равновесия шарика $\xi = \frac{x}{z_0}$? **

Заметим, что приведенное в условии численное значение параметра γ меньше критического $\gamma^* = \frac{5^5}{6^6} \approx 0,067$, поэтому при таком заряде существует положение устойчивого равновесия шарика. Его координата является меньшим корня уравнения (6).

С точностью до малых величин первого порядка, его решение элементарно

$$\xi = \frac{x}{z_0} \approx \gamma = 1,0 \cdot 10^{-2}. \quad (8)$$

****2.5.** Чему равно относительно изменение частоты колебаний шарика $\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$? **

Обозначим расстояние от диска до положения равновесия заряженного шарика z_1 . Переместим начало отсчета в эту точку. Уравнение движения шарика при малом отклонении x от положения равновесия имеет вид (при преобразовании функций опять используется малость отклонений $x \ll z_1$):

$$\begin{aligned} ma &= -k(z_1 + x) + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 (z_1 - x)^5} = -kz_1 - kx + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5 \left(1 - \frac{x}{z_1}\right)^5} \approx \\ &\approx -kz_1 - kx + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} \left(1 + 5\frac{x}{z_1}\right) = -kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} - \left(k - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6}\right) x \end{aligned}$$

Первые два слагаемых взаимно уничтожаются, так как точка z_1 - положение равновесия. Таким образом, получаем уравнение гармонических колебаний

$$a = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{5q^2V}{8\pi^2\varepsilon_0 k z_1^5} \right) x$$

$$\text{с частотой } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{5q^2V}{8\pi^2\varepsilon_0 k z_1^5} \right)} = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{5q^2V}{8\pi^2\varepsilon_0 k z_1^5} \right)} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{5q^2V}{16\pi^2\varepsilon_0 k z_1^5} \right).$$

Следовательно, относительное изменение частоты колебаний равно

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{5q^2V}{16\pi^2\varepsilon_0 k z_1^5} \approx -\frac{5}{2}\gamma = -2,5\%. \quad (8)$$

****2.6.** Оцените, за сколько периодов колебаний заряженного шарика их амплитуда уменьшится $\eta = 1,0\%$. ******

Так как индуцированные на поверхности диска заряды зависят от положения заряженного шарика, то при его движении величины этих зарядов будут изменяться, то есть по диску будут протекать электрические токи. Причиной затухания колебаний является потеря энергии на выделение джоулевой теплоты при протекании электрического тока при «перезарядке» диска. При малом сопротивлении диска можно пользоваться «квазистационарным» приближением, то есть считать, что заряд диска соответствует равновесному значению при заданном положении шарика. Величина равновесного индуцированного заряда была подсчитана ранее и равна $q' = \frac{qS}{4\pi z^2}$. Сила тока протекающего поперек диска легко вычисляется

$$I = \frac{dq'}{dt} = \frac{dq'}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{qS}{2\pi z^3} v, \quad (9)$$

где $v = -\frac{dz}{dt}$ - скорость шарика. Так как колебания шарика малы, то можно пренебречь изменением расстояния z в знаменателе формулы (9) и положить $z(t) \approx z_1$. В этом случае мощность теплоты, выделяющейся в диске по закону Джоуля-Ленца равна

$$P = I^2 R = \left(\frac{qS}{2\pi z^3} \right)^2 \rho \frac{h}{S} v^2 \approx \frac{q^2 S h \rho}{4\pi^2 z_1^6} v^2.$$

Если скорость шарика изменяется по закону $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то среднее за период значение квадрата скорости равно $\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} v_0^2$. Потери энергии за один период колебаний равны

$$\Delta W = \langle P \rangle T = \frac{q^2 S h \rho}{4\pi^2 z_1^6} \langle v^2 \rangle T = \frac{q^2 S h \rho}{4\pi^2 z_1^6} \cdot \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10)$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что изменения положения равновесия и частоты малы, поэтому в данной формуле можно положить $z_1 \approx z_0$, $\omega \approx \omega_0$. Начальная энергия колебаний $W_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, поэтому формулу (10) можно записать в виде

$$\Delta W = \frac{q^2 S h \rho}{4\pi^2 z_0^6} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot \frac{2\pi}{m \omega_0} = \frac{q^2 S h \rho}{8\pi^2 \varepsilon_0 k z_0^6} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot \frac{4\pi \rho \varepsilon_0}{\omega_0} \cdot \frac{k}{m} = 4\pi \rho \varepsilon_0 \omega_0 \gamma W_0. \quad (10a)$$

Как следует из этого выражения, потери энергии за период пропорциональны начальной энергии, следовательно, энергия как функция числа колебаний будет убывать в геометрической прогрессии, действительно, за один период энергия уменьшится до величины

$$\Delta W = W_0 - W_1 = 4\pi \rho \varepsilon_0 \omega_0 \gamma W_0 \Rightarrow W_1 = (1 - 4\pi \rho \varepsilon_0 \omega_0 \gamma) W_0,$$

после n колебаний энергия станет равной

$$W_n = (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^n W_0. \quad (11)$$

Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то из формулы (11) следует, что амплитуда колебаний зависит от числа колебаний по закону

$$A_n = A_0 (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^{\frac{n}{2}}.$$

Учитывая, что рассматриваемое изменение амплитуды колебаний мало, то очередной раз можно воспользоваться приближением

$$A_n = A_0 (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^{\frac{n}{2}} \approx A_0 (1 - 2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma \cdot n),$$

или относительное уменьшение амплитуды

$$\frac{A_0 - A_n}{A_0} = \eta = 2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma \cdot n.$$

Таким образом, искомое число колебаний равно

$$n = \frac{\eta}{2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma} \approx 2,9 \cdot 10^7, \quad (12)$$

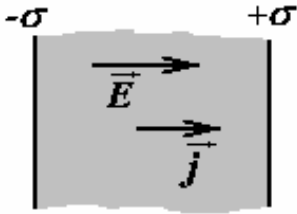
что соответствует времени более одного месяца.

2.7. Оцените, при каком удельном электрическом сопротивлении материала диска затухание колебаний шарика будет максимальным.

Проведенное выше описание затухание колебаний не полно.

Оно справедливо только для малых удельных сопротивлений. Действительно, из полученных выражений следует, что для непроводящей пластинки ($\rho \rightarrow \infty$), колебания затухают мгновенно, хотя в этом случае отсутствуют механизмы потери энергии, следовательно, колебания должны быть вообще незатухающими.

Для более точного описания затухания необходимо более точно рассмотреть динамику изменения



поверхностной плотности индуцированных зарядов на поверхности диска. Для этого воспользуемся законом Ома¹ $j = \frac{1}{\rho} E$ и связью плотности тока с изменением поверхностной плотности заряда $j = \frac{d\sigma}{dt}$. Учитывая, что поле внутри диска создается как полем заряда шарика, так и индуцированными зарядами, запишем уравнение для изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho\varepsilon_0} \left(\frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma \right). \quad (13)$$

Обозначим $\tau = \rho\varepsilon_0$ и упростим это уравнение, используя стандартную методику

$$\begin{aligned}\tau \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} \left(1 - \frac{x}{z_1}\right)^{-2} - \sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} \left(1 + 2\frac{x}{z_1}\right) - \sigma = \\ &= \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \sigma\end{aligned}$$

Плотность тока перезарядки (следовательно, и потери энергии) определяются переменной составляющей плотности заряда, поэтому представим $\sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} + s(t)$, где $s(t)$ - изменяющаяся часть поверхностной плотности заряда. Для последней справедливо уравнение

$$\tau \frac{ds}{dt} = \frac{q}{2\pi z_1^3} x - s.$$

Как мы показали выше, затухание колебаний является крайне малым, поэтому координату шарика с высокой точностью можно представить в виде²

$$x = A \cos \omega t,$$

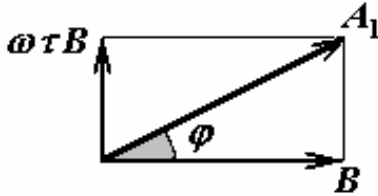
тогда для определения $s(t)$ получим уравнение

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \frac{q}{2\pi z_1^3} A \cos \omega t, \quad (14)$$

которое проще всего решить методом векторных диаграмм. Так, при $s = B \cos(\omega t + \varphi)$

$$\tau \frac{ds}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \varphi) = B\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда



векторная диаграмма, описывающее уравнение (14) имеет вид, показанный на рисунке (где обозначено $A_1 = \frac{q}{2\pi z_1^3} A$). Из данной диаграммы следует

— ¹ Можно использовать закон Ома и в «обычной» форме — «для участка цепи». ² Конечно, в качестве частоты колебаний можно взять собственную частоту колебаний ω_0

$$B^2(1 + (\omega\tau)^2) = A_1^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\omega\tau$$

$$\text{ППП } s = \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \frac{q}{2\pi z_1^3} \cos(\omega t + \varphi).$$

Далее, аналогично выводу соотношения (10), можно утверждать, что потери энергии за период пропорциональны (оставлены только сомножители, зависящие от удельного электрического сопротивления)

$$\Delta W \propto B^2 \omega \tau \propto \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2}.$$

Данная функция достигает максимума при $\omega \tau = 1$, следовательно, при этом условии затухание и будет максимальным. Таким образом, получаем $2\pi\nu_0\rho\varepsilon_0 = 1$, или окончательно

$$\rho = \frac{1}{2\pi\nu_0\varepsilon_0} \approx 1,8 \cdot 10^9 \text{ ОМ} \cdot \text{м}. \quad (15)$$

2.8. Качественно опишите, какие именно свойства индуцированных зарядов (и их изменения) обеспечивают появление сил, действующих на шарик, приводящих к а) смещению положения равновесия; б) изменению частоты колебаний; в) затуханию колебаний.

На основании предыдущих рассуждений следует, что а) постоянная составляющая поверхностной плотности заряда приводит к смещению положения равновесия; б) изменение поверхностной плотности в «квазистационарном приближении» приводит к изменению частоты колебаний; в) Заметим, что если все силы, действующие на шарик, зависят только от координат, то затухание колебаний отсутствует. Поэтому следует искать причины, приводящие к появлению составляющих сил, зависящих от скорости движения шарика. Причиной появления таких слагаемых является «запаздывание» - распределение индуцированных зарядов отстает от равновесного распределения, соответствующего положению шарика в «данный момент времени». Наличие «запаздывания» распределения зарядов, по отношению к положению заряда приводят к затуханию колебаний.

Дополнение, не входящее в оцениваемое решение. Эти утверждения можно строго подтвердить на «языке уравнений» движения шарика и изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов.

Сила электрического взаимодействия $F \approx \frac{qq'h}{2\pi\varepsilon_0 z^3} = \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \cdot \sigma$

Уравнение колебаний шарика

$$\begin{aligned} ma &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0(z_1 - x)^3} \cdot \sigma = -k(z_1 + x) + \frac{qV\sigma}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \cdot \left(1 - \frac{x}{z_1}\right)^{-3} = \\ &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \sigma + \frac{3qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^4} \sigma x \end{aligned}$$

Уравнение для изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho\varepsilon_0} \left(\frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma \right),$$

или, с учетом использованных обозначений,

$$\tau \frac{d\sigma}{dt} = \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \sigma$$

Из этого уравнения выразим $\sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt}$, и подставим в уравнение колебаний шарика

$$ma = -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \sigma + \frac{3qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^4} \sigma x =$$

$$\begin{aligned}
&= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \left(\frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) + \frac{3qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^4} x \left(\frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) = \\
&= -kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} - \left(k - \frac{q^2 V}{4\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6} - \frac{3q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6} \right) x - \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt} + \frac{3qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^4} x \left(\frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right)
\end{aligned}$$

Первые два слагаемых взаимно уничтожаются $-kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} = 0$ (уравнение для определения смещенного положения равновесия).

Множитель при третьем слагаемом определяет изменение частоты

$$-\left(k - \frac{q^2 V}{4\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6} - \frac{3q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6}\right) x = -\left(k - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6}\right) x = -m\omega_1^2 x$$

Следующее, содержащее скорость изменения поверхностной плотности, ответственно за затухание. Остальными следует пренебречь, как имеющие более высокий порядок малости. Итого имеем уравнение колебаний.

$$ma = -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt}.$$

В использованном приближении, уравнение для плотности заряда можно решать методом последовательных приближений. Пренебрегая «запаздыванием» получаем

$$\sigma_{(0)} \approx \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x,$$

тогда $\tau \frac{d\sigma}{dt} \approx \tau \frac{d\sigma_{(0)}}{dt} = \frac{q}{2\pi z_1^3} \tau \frac{dx}{dt}$. Подставляя в уравнение движения шарика, получаем уравнение

$$ma = -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt} \approx -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\varepsilon_0 z_1^3} \cdot \frac{q}{2\pi z_1^3} \tau \frac{dx}{dt} = -m\omega_1^2 x - \frac{q^2 V \rho}{4\pi^2 z_1^6} \cdot \frac{dx}{dt},$$

в котором в явном виде присутствует слагаемое, «ответственное» за затухание.

Решение 10.3

3.1 Сила тяги автомобиля связана с его мощностью $F_{\text{тяги}} = Pv$, поэтому на основании второго закона Ньютона можно записать

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{P}{v} - F_0 - \beta v^2. \quad (1)$$

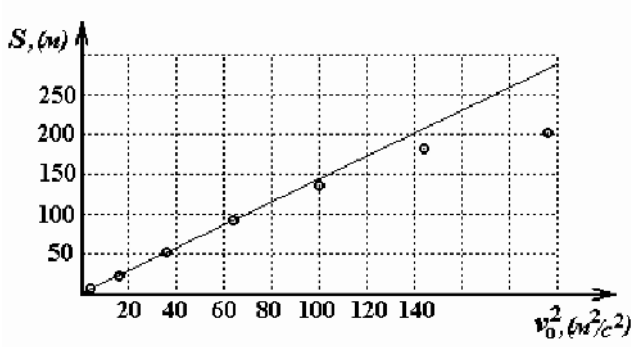
Переход к уравнению для изменения кинетической энергии осуществляется традиционным методом: умножаем уравнение на скорость

$$mv \frac{\Delta v}{\Delta t} = P - (F_0 + \beta v^2) v,$$

замечаем, что $\Delta E = \Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = mv \Delta v$, и получаем

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P - (F_0 + \beta v^2) v. \quad (2)$$

3.2 При малых скоростях движения автомобиля v можно пренебречь силой сопротивления воздуха, тогда на основании уравнения $\frac{mv_0^2}{2} \approx F_0 S$, получим зависимость пути пройденного автомобилем $S \approx \frac{mv_0^2}{2F_0}$ от скорости.



По приведенным экспериментальным данным построим график зависимости пути от квадрата начальной скорости. Действительно при малых скоростях эта зависимость линейна. Из наклона

$$k = \frac{\Delta S}{\Delta(v_0^2)} = \frac{m}{2F_0} \approx 1,44 \frac{c^2}{m}$$

графика определяем силу постоянного сопротивления

$$F_0 = \frac{m}{2k} \approx 0,38 \text{ кН}$$

Коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления воздуха определим, зная максимальные скорость и мощность автомобиля. При равномерном движении с максимальной скоростью выполняется соотношение $\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - F_0 - \beta v_{\max}^2 = 0$, из которого определяем $\beta = \frac{\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - F_0}{v_{\max}^2} \approx 1,8 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$.

Требуемый параметр также рассчитывается $\gamma = \frac{\beta v_{\max}^2}{F_0} \approx 3,6$.

3.3 В установившемся режиме выполняется соотношение

$$P = (F_0 + \beta v^2) v,$$

аналогично — при движении с максимальной скоростью

$$P_{\max} = (F_0 + \beta v_{\max}^2) v_{\max}.$$

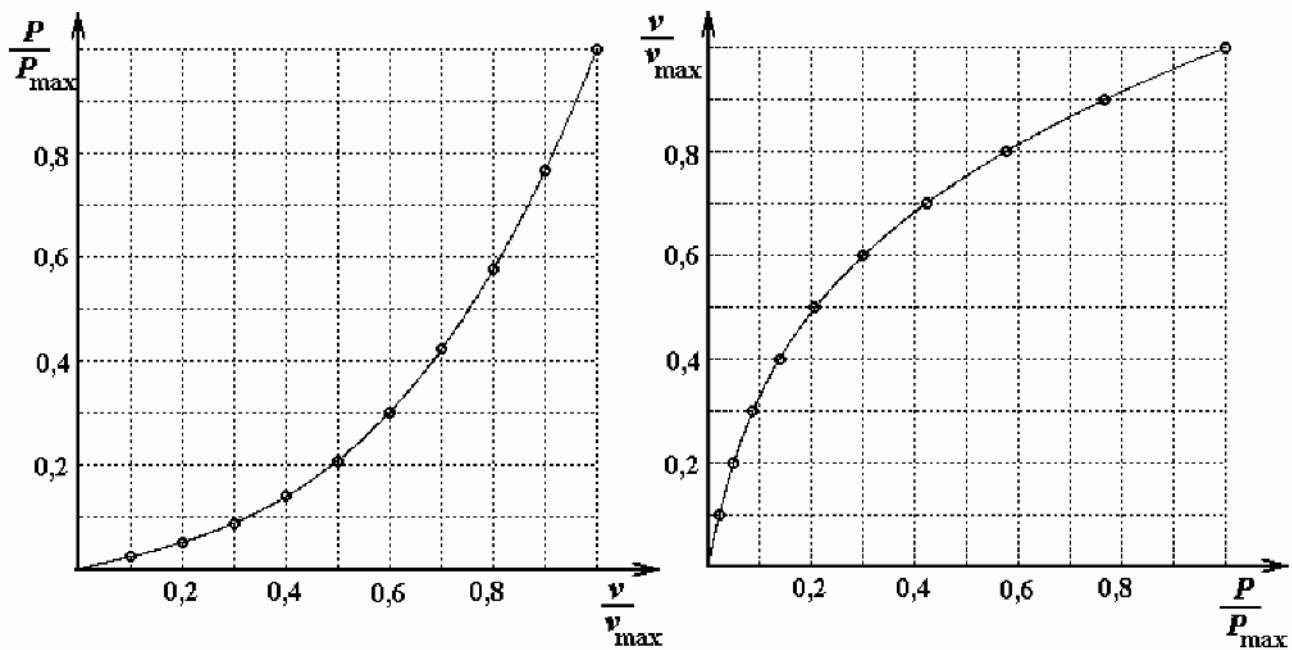
Их отношение

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{(F_0 + \beta v^2) v}{(F_0 + \beta v_{\max}^2) v_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_{\max}^2}{F_0} \cdot \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_{\max}^2}{F_0}\right)} \cdot \frac{v}{v_{\max}}$$

дает связь между относительными характеристиками

$$\boxed{\kappa = \frac{\eta(1 + \gamma\eta^2)}{(1 + \gamma)}} \quad (3)$$

Выразить в явном виде зависимость скорости от мощности сложно, зато легко построить график зависимости мощности от скорости, а затем его повернуть.



3.4 При движении в гору автомобиль должен также преодолевать проекцию силы тяжести равную $mg \sin \alpha$. Эта сила постоянна, поэтому можно считать, что она увеличивает параметр F_0 в рассматриваемых уравнениях.

Аналогично, сопротивление воздуха изменяет параметр β . В обоих случаях изменяется величина параметра γ в уравнении (3). Таким образом, нам следует разработать методику использования графического решения этого уравнения при изменении параметра γ .

Для определения скорости установившегося движения необходимо решить уравнение

$$P = v (F_0 + \beta v^2), \quad (4)$$

которое можно преобразовать к виду (3) и использовать уже построенный график. Обозначим $\gamma_0 = 3,5$ и переписшем (4) в виде

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} \frac{P}{F_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_0} = \left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} v \right) \left(1 + \gamma_0 \left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} v \right)^2 \right) \frac{1}{1 + \gamma_0}.$$

Мы имеем уравнение, совпадающее с решенным, только в нем вместо η стоит неизвестная $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} v \right)$, а вместо κ - $\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} \frac{P}{F_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_0}$. Теперь можно провести необходимые расчеты.

При движении в гору:

$$F'_0 = F_0 + mg \sin \alpha = 1320 \text{ Н}; \quad \sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} \frac{P}{F_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_0} \approx 0,12.$$

По графику находим $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} v \right) \approx 0,3$. Следовательно,

$$v = 0,3 \sqrt{\frac{\gamma_0 F_0}{\beta}} \approx 15 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 55 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

При движении с багажником

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} \frac{P}{F_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_0} = 0,85, \text{ из графика находим } \left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}} v \right) \approx 0,92, \text{ наконец,}$$

$$v = 0,92 \sqrt{\frac{\gamma_0 F_0}{\beta}} \approx 25 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 90 \frac{\text{км}}{\text{ч а с}}.$$

3.5 Рассмотрим динамическое уравнение движения (1) в течение малого временного интервала. В течение этого промежутка скорость возрастает приблизительно пропорционально времени $v = at$, а мощность изменяется по закону $P = \frac{P_{\max}}{\tau} t$, а силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

Подставим эти выражения в уравнение (1)

$$ma = \frac{P_{\max}}{\tau a} - F_0. \quad (4)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно неизвестного ускорения a , решить которое не сложно

$$a^2 + \frac{F_0}{m} a - \frac{P_{\max}}{\tau m} = 0 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{F_0}{2m} \right)^2 + \frac{P_{\max}}{\tau m}} - \frac{F_0}{2m}. \quad (5)$$

Подставляя численные значения, получим необходимые результаты:

при $\tau = 10\text{с}$ $a \approx 1,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

при $\tau = 1,0\text{с}$ $a \approx 6,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.6 Оценку времени разгона можно получить как отношение изменения скорости $\Delta v = v_{\max} - \eta v_{\max} = v_{\max}(1 - \eta)$ к ускорению в начальный момент разгона, которое определяется из уравнения (1)

$$a_0 = \frac{1}{m} \left(\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - (F_0 + \beta v_{\max}^2) \right),$$

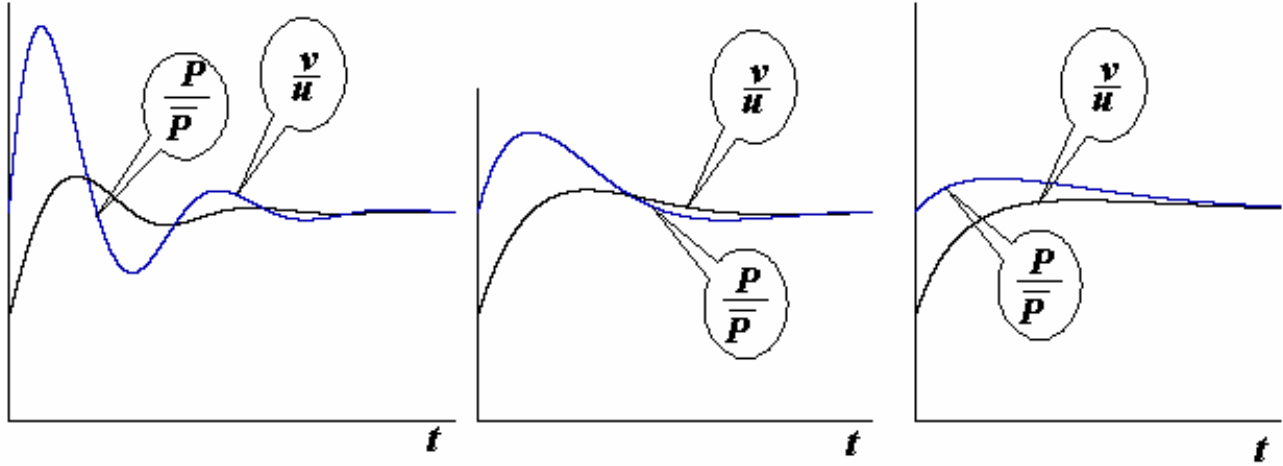
Таким образом, получим

$$\Delta t \approx \frac{mv_{\max}(1 - \eta)}{\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - (F_0 + \beta v_{\max}^2)} \approx 6,5\text{с}.$$

3.7 Описанное управление действительно возможно при **положительных** значениях коэффициента C . Так если автомобиль движется с требуемой скоростью, то мощность остается постоянной, если по каким-то причинам скорость стала меньше требуемой, то мощность двигателя начнет возрастать, и, наоборот, с ростом скорости мощность будет убывать.

3.8 Качественно динамика изменения скорости и мощности будет иметь вид: Мощность начнет возрастать, скорость также будет расти, когда скорость станет равной требуемой, мощность достигнет максимального значения, после чего начнет убывать, а скорость продолжать расти, возможно несколько периодов таких затухающих колебаний. Чем больше значение параметра управления C , тем резче будут эти колебания, при уменьшении параметра

управления выравнивание скорости будет проходить медленнее, но зато без резких колебаний. Оптимальный выбор параметра управления определяется условием: минимальное время установления скорости без ее колебаний (критический режим).



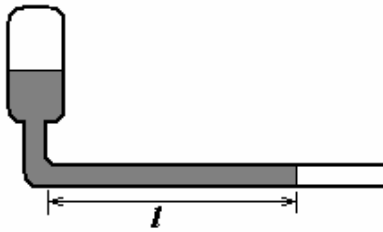
Решение задачи 11.1 «Показательная разминка»

1.1 По второму закону Ньютона ускорение точки постоянно и равно $a = \frac{F}{m}$, при равноускоренном движении пройденный путь зависит от времени по закону $S = \frac{at^2}{2}$.

Поэтому $\lambda = 2$.

1.2 Так как жидкость «вязкая», то можно считать, что в любой момент времени движение жидкости является «установившемся», для которого справедливо уравнение (данное в примечании)

$$v = \frac{dl}{dt} = \kappa \frac{\Delta P}{l}, \quad (1)$$

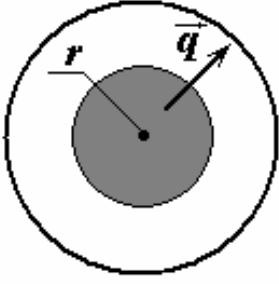


Из этого уравнения следует $l dl = \kappa \Delta P dt$, после интегрирования получаем $\frac{1}{2} l^2 = \kappa \Delta P t$, окончательно получаем $l = \sqrt{2\kappa \Delta P t}$. Таким образом, искомый показатель степени $\lambda = \frac{1}{2}$.

Другой способ решения задачи заключается в подстановке функции $l = Ct^\lambda$, приведенной в условии в уравнение (1)

$$C\lambda t^{\lambda-1} = \kappa \frac{\Delta P}{C} t^{-\lambda}.$$

Приравняв показатели степеней переменной t ($\lambda - 1 = -\lambda$), получаем искомое значение параметра $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким образом, при этом значении приведенная функция удовлетворяет уравнению (1).



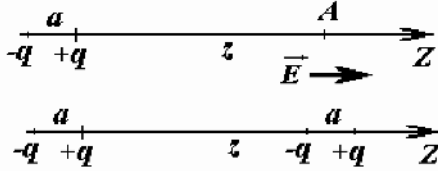
1.3 В установившемся режиме вся теплота, выделившаяся внутри планеты, переносится к ее поверхности. Так как система обладает сферической симметрией, то и распределение температур, и тепловые потоки также сферически симметричны. Выделим внутри планеты сферу радиуса r . Из уравнения теплового баланса следует, что суммарный поток теплоты через эту сферу равен количеству теплоты, выделившейся внутри сферы, что может быть записано в виде уравнения (с учетом закона, сформулированного в приложении)

$$\frac{4}{3}\pi r^3 w = -4\pi r^2 \gamma \frac{dT}{dr}. \quad (1)$$

Это уравнение легко приводится к простому виду $\frac{dT}{dr} = -\frac{w}{3\gamma}r$, решение которого с учетом граничного условия на поверхности (при $r = R$ температура $T = T_0$) имеет вид

$$T - T_0 = -\frac{w}{6\gamma}(r^2 - R^2) \Rightarrow T = \left(T_0 + \frac{w}{6\gamma}R^2\right) - \frac{w}{6\gamma}r^2 \quad (2)$$

приведенный в условии, причем искомый показатель степени равен $\lambda = 2$.



Кто не умеет интегрировать, может решить задачу, подставив функцию $T = A + Br^\lambda$ в уравнение (1) $\frac{dT}{dr} = B\lambda r^{\lambda-1} = -\frac{w}{3\gamma}r$. Из этого равенства следует, что приведенная в условии функция удовлетворяет уравнению теплового баланса при $\lambda = 2$ и любом значении параметра A , который может быть найден из граничного условия на поверхности планеты.

1.4 Совместим ось Z с осью диполя, а ее начало определим в точке нахождения диполя. Тогда в точке A , находящейся на расстоянии z , напряженность поля может быть записана в виде

$$E_{\text{дип.}}(z) = E_{\text{точ.}}(z) - E_{\text{точ.}}(z + a) = -\frac{dE_{\text{точ.}}}{dz}a, \quad (1)$$

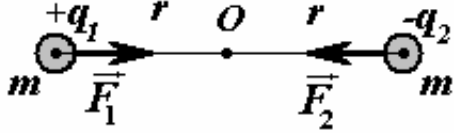
где $E_{\text{точ.}}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ напряженность поля, создаваемого точечным зарядом, при выводе (1) учтена малость расстояния a между зарядами диполя. Вычисляя производную, получим

$$E_{\text{дип.}}(z) = -\frac{dE_{\text{точ.}}}{dz}a = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 z^3}. \quad (2)$$

Пусть второй диполь находится на расстоянии z в поле, напряженность которого зависит от координаты по закону $E(z)$. Тогда, сила, действующая на этот диполь, может в том же приближении представлена в виде

$$F = qE(z + a) - qE(z) = qa \frac{dE}{dz} = -\frac{3(qa)^2}{4\pi\epsilon_0 z^4}, \quad (3)$$

что соответствует приведенной в условии формуле при $\lambda = -4$. *Задача может быть решена и традиционным способом: записать точное выражение для силы взаимодействия пар зарядов, а затем провести разложение по малому параметру – размеру диполя.* **1.5** Так как массы шариков равны по условию, а силы, действующие на них равны по третьему закону Ньютона, то шарики будут двигаться навстречу друг другу с равными по



модулю скоростями и столкнуться в средней точке. Когда шарики находятся на расстоянии r друг от друга, скорость каждого может быть найдена из закона сохранения энергии

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h} \right). \quad (1)$$

Найти из этого уравнения время сближения сложно (хотя и возможно), однако нам и нет необходимости решать это уравнение – нам необходим вид зависимости времени движения от начального расстояния. Введем собственную систему единиц измерения: расстояния – начальное расстояние h ; единицу измерения времени T определим позднее. Расстояние между частицами и время, измеренные «в новых единицах» обозначим

$$\xi = \frac{r}{h}; \quad \tau = \frac{t}{T}.$$

Переходя к новым переменным в уравнении (1), получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{hd\xi}{Td\tau}; \\ m \left(\frac{hd\xi}{Td\tau} \right)^2 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Используем теперь «произвол» в выборе единицы измерения времени таким образом, чтобы в этом уравнении не осталось параметров, то есть сделаем его «безразмерным», для чего достаточно положить

$$m \left(\frac{h}{T} \right)^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h}, \quad (3)$$

или определить единицу измерения времени как

$$T = \sqrt{\frac{4m\pi\epsilon_0 h^3}{q^2}}. \quad (4)$$

В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{\xi} - 1, \quad (5)$$

в котором нет никаких исходных параметров. Кроме того, пределы изменения переменной ξ также являются «универсальными» $\xi \in [1,0]$. Следовательно, и его решение – зависимость $\xi(\tau)$ также «универсальна», поэтому и время движения (измеренное в единицах T) является некоторой константой. Обозначим ее τ_0 , тогда время движения, измеренной в «обычных» единицах определяется как

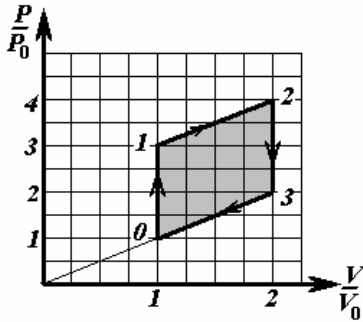
$$t_0 = \tau_0 T = \tau_0 \sqrt{\frac{4m\pi\varepsilon_0 h^3}{q^2}} = Ch^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Таким образом, приведенная формула доказана, а искомый показатель степени равен $\lambda = \frac{3}{2}$.
Возможны и другие варианты решения: прямое интегрирование уравнения (1); переход к безразмерным параметрам в уравнении 2 закона Ньютона; проведение аналогии с 3 законом Кеплера и т.д.

Решение задачи 11-2.

Часть 1.

Построим диаграмму процесса изменения состояния рабочего газа. Обозначим площадь поперечного сечения рабочего цилиндра S , а жесткость пружины k .



Последовательно рассмотрим все узловые состояния и процессы рабочего газа. Конечно, коэффициент полезного действия машины можно подсчитать как отношение работы (численно равной площади цикла) к количеству полученной теплоты. Однако, учитывая, что нам необходимо найти и среднюю мощность, вычислим сразу и теплоты, получаемые от нагревателя и отданные холодильнику на каждом этапе.

Состояние 0.

В начальном состоянии параметры газа следующие:

- объем $V_0 = l_0 S$;
- давление обусловлено силой упругости пружины

$$P_0 = \frac{kl_0}{S} = \frac{F_0}{S};$$

- температура находится из уравнения состояния идеального газа (ν - количество молей рабочего газа)

$$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = \frac{kl_0^2}{\nu S} = \frac{F_0 l_0}{\nu R}. \quad (1)$$

Состояние 1.

После включения нагревателя температура и давления газа начнут расти до тех пор, пока сила давления газа на поршень окажется в состоянии сдвинуть поршень вправо (состояние 1). В этот момент объем еще останется прежним

$$V_1 = V_0 = l_0 S,$$

давление газа станет равным

$$P_1 = \frac{kl_0 + F_1}{S} = \frac{(n+1)F_0}{S} = 3\frac{F_0}{S},$$

а температура

$$T_1 = \frac{P_1 V_0}{\nu R} = \frac{(kl_0 + F_1)l_0}{\nu S} = \frac{(n+1)F_0 l_0}{\nu R} = 3\frac{F_0 l_0}{\nu R}. \quad (2)$$

Процесс 0 – 1.

Таким образом, процесс $(0 \rightarrow 1)$ является **изохорным**, в его ходе газ получит количество теплоты, равное

$$Q_{0 \rightarrow 1} = \nu C_V (T_1 - T_0) = \nu \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} n F_0 l_0 = 5 F_0 l_0. \quad (3)$$

При постоянной мощности нагревателя этот процесс будет протекать в течение промежутка времени

$$\tau_1 = \frac{Q_{0 \rightarrow 1}}{q_1} = \frac{5}{2} n \frac{F_0 l_0}{q_1} = 5 \frac{F_0 l_0}{q_1}. \quad (4)$$

При дальнейшем нагреве поршень будет смещаться вправо. Состояние 2. В конечной точке расширения, когда объем станет равным $V_2 = l_1 S = ml_0 S = 2l_0 S$, давление достигнет значения

$$P_2 = \frac{kl_1 + F_1}{S} = \frac{km l_0 + n F_0}{S} = \frac{(m+n)F_0}{S} = 4\frac{F_0}{S}, \quad (6)$$

а температура станет равной

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n)m F_0 l_0}{\nu R} = 8\frac{F_0 l_0}{\nu R}. \quad (7)$$

Процесс 1 – 2. Пусть поршень находится в некоторой промежуточной точке с координатой x , в этом состоянии объем газа будет равен $V(x) = xS$. Считая процесс равновесным и пренебрегая инерционностью системы, давление газа можно записать в виде

$$P(x) = \frac{kx + F_1}{S}, \quad (8)$$

то есть зависимость давления от объема является линейной. Работа, совершенная газом в процессе расширения, численно равна площади под графиком процесса на рассматриваемом участке $(1 \rightarrow 2)$

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow 2} &= \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{(m+n)F_0}{S} + \frac{(n+1)F_0}{S} \right) (m-1)l_0 S = \\ &= \frac{(m+2n+1)(m-1)}{2} F_0 l_0 = 3,5 F_0 l_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Изменение внутренней энергии рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}\Delta U_{1 \rightarrow 2} &= \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu \frac{5}{2} R \left(\frac{(m+n)m F_0 l_0}{\nu R} - \frac{(n+1) F_0 l_0}{\nu R} \right) = \\ &= \frac{5}{2} F_0 l_0 ((m+n)m - (n+1)) = 12,5 F_0 l_0\end{aligned}\quad (10)$$

Количество теплоты, полученной в ходе процесса ($1 \rightarrow 2$), рассчитывается с помощью первого закона термодинамики

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + A_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} F_0 l_0 (6m + 7n + 6)(m - 1) = 16 F_0 l_0. \quad (11)$$

Соответственно, время этого процесса

$$\tau_2 = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{q} = \frac{F_0 l_0}{2q} (6m + 7n + 6)(m - 1) = 16 \frac{F_0 l_0}{q}. \quad (12)$$

Состояние 3. После отключения нагревателя и включения холодильника газ начнет охлаждаться при неизменном объеме $V_3 = m l_0 S$, до тех пор, сила давления газа не станет меньше силы упругости возвращающей пружины, то есть до значения

$$P_3 = \frac{m k l_0}{S} = m \frac{F_0}{S} = 2 \frac{F_0}{S}. \quad (13)$$

Температура при этом станет равной

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{\nu R} = m^2 \frac{F_0 l_0}{\nu R} = 4 \frac{F_0 l_0}{\nu R}. \quad (14)$$

Процесс 2-3. Процесс остывания является изохорным (при этом работа равна нулю $A_{2 \rightarrow 3} = 0$), количество отданной теплоты равно уменьшению внутренней энергии

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{5}{2} \nu C_V (T_2 - T_3) = \frac{5}{2} F_0 l_0 m n = 10 F_0 l_0 \quad (15)$$

и пройдет за время

$$\tau_3 = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{q} = \frac{5 F_0 l_0}{2q} m n = 10 \frac{F_0 l_0}{q}. \quad (16)$$

Процесс 3-4. Так как газ сжимается под действием пружины, то его давление определяется силой упругости пружины

$$P = \frac{kx}{S}. \quad (17)$$

Характеристики этого процесса рассчитываются стандартным методом: - изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{3 \rightarrow 0} = \frac{5}{2} \nu C_V (T_0 - T_3) = -\frac{5}{2} F_0 l_0 (m^2 - 1) = -7,5 F_0 l_0; \quad (18)$$

- работа, совершенная газом,

$$A_{3 \rightarrow 0} = \frac{P_3 + P_0}{2} \cdot (V_0 - V_3) = -\frac{1}{2} \left(\frac{m F_0}{S} + \frac{F_0}{S} \right) (m - 1) l_0 S = -\frac{(m^2 - 1)}{2} F_0 l_0 = -1,5 F_0 l_0; \quad (19)$$

- количество отданной теплоты

$$Q_{3 \rightarrow 0} = \frac{(m^2 - 1)}{2} F_0 l_0 + \frac{5}{2} (m^2 - 1) F_0 l_0 = 3(m^2 - 1) F_0 l_0 = 9 F_0 l_0; \quad (20)$$

- время протекания процесса

$$\tau_4 = 3(m^2 - 1) \frac{F_0 l_0}{q} = 9 \frac{F_0 l_0}{q}. \quad (21)$$

Коэффициент полезного действия двигателя рассчитаем по формуле

$$\eta = \frac{A_\Sigma}{Q_{0 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2}} = \frac{2n(m - 1)}{5n + (6m + 7n + 6)(m - 1)} = \frac{2}{21} \approx 0,095. \quad (22)$$

Заметим, что в данном случае работа газа над поршнем равна работе рабочего устройства, которая в свою очередь легко может быть рассчитана как произведение перемещения поршня на силу, которая действует со стороны поршня на рабочее устройство

$$A = n F_0 (m - 1) l_0 = n(m - 1) F_0 l_0 = 2 F_0 l_0. \quad (23)$$

Во всех остальных случаях «полезная» работа также будет определяться этой формулой, но не будет равна работе газа за цикл.

Среднюю мощность двигателя рассчитаем как отношение полезной работы к периоду цикла

$$N = \frac{A}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4} = \frac{q}{20}. \quad (24)$$

Для удобства представим параметров газа во всех узловых состояниях в таблице 1, а характеристики процессов в таблице 2.

Таблица 1.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{k l_0}{S} = \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+1)F_0}{S} = 3 \frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+1)F_0 l_0}{\nu R} = 3 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = m l_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n)F_0}{S} = 4 \frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n)m F_0 l_0}{\nu R} = 8 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
3	$V_3 = m l_0 S$	$P_3 = m \frac{F_0}{S} = 2 \frac{F_0}{S}$	$T_3 = \frac{P_3 V_3}{\nu R} = m^2 \frac{F_0 l_0}{\nu R} = 4 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$

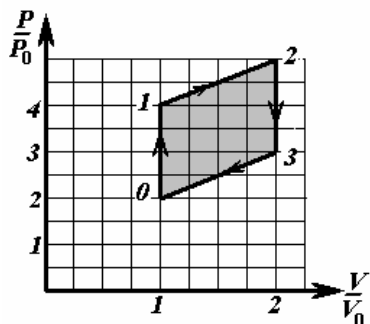
	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0}{S} = \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+1)F_0}{S} = 3 \frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+1)F_0 l_0}{\nu R} = 3 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n)F_0}{S} = 4 \frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n)mF_0 l_0}{\nu R} = 8 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
3	$V_3 = ml_0 S$	$P_3 = m \frac{F_0}{S} = 2 \frac{F_0}{S}$	$T_3 = \frac{P_3 V_3}{\nu R} = m^2 \frac{F_0 l_0}{\nu R} = 4 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Таблица 2.

	Тип процесса	ΔU	A	Q	Время
0-1	$V = const$	$5F_0 l_0$	0	$5F_0 l_0$	$5 \frac{F_0 l_0}{q}$
1-2	$P(x) = \frac{kx + F_1}{S}$	$12,5F_0 l_0$	$3,5F_0 l_0$	$16F_0 l_0$	$16 \frac{F_0 l_0}{q}$
2-3	$V = const$	$-10F_0 l_0$	0	$-10F_0 l_0$	$10 \frac{F_0 l_0}{q}$
3-0	$P(x) = \frac{kx}{S}$	$-7,5F_0 l_0$	$-1,5F_0 l_0$	$-9F_0 l_0$	$9 \frac{F_0 l_0}{q}$
всего		0	$2F_0 l_0$	$2F_0 l_0$	$40 \frac{F_0 l_0}{q}$

Таблица 2.

	Тип процесса	ΔU	A	Q	Время
0-1	$V = const$	$5F_0 l_0$	0	$5F_0 l_0$	$5 \frac{F_0 l_0}{q}$
1-2	$P(x) = \frac{kx + F_1}{S}$	$12,5F_0 l_0$	$3,5F_0 l_0$	$16F_0 l_0$	$16 \frac{F_0 l_0}{q}$
2-3	$V = const$	$-10F_0 l_0$	0	$-10F_0 l_0$	$10 \frac{F_0 l_0}{q}$
3-0	$P(x) = \frac{kx}{S}$	$-7,5F_0 l_0$	$-1,5F_0 l_0$	$-9F_0 l_0$	$9 \frac{F_0 l_0}{q}$
всего		0	$2F_0 l_0$	$2F_0 l_0$	$40 \frac{F_0 l_0}{q}$



Часть 2.

С учетом атмосферного давления «картинка цикла» поднимется на единицу вверх по шкале $\left(\frac{P}{P_0}\right)$, что приведет к увеличению теплоты, которую сообщает газу нагреватель. Газ, по-прежнему,

получает теплоту от нагревателя на участках изохорического процесса $(0 \rightarrow 1)$ и процесса расширения $(1 \rightarrow 2)$.

Расчет параметров газа в узловых точках процесса аналогичен проведенному выше, поэтому приведем его без комментариев и дадим в виде таблицы 3.

Таблица 3.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0 + P_{атм}}{S} = 2 \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = 2 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+2)F_0}{S} = 4 \frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+2)F_0 l_0}{\nu R} = 4 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n+1)F_0}{S} = 5 \frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n+1)mF_0 l_0}{\nu R} = 10 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты равно

$$Q_{0 \rightarrow 2} = \Delta U_{0 \rightarrow 2} + A_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_0) + \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = 24,5 F_0 l_0 \quad (25)$$

Соответственно, коэффициент полезного действия равен

$\eta = \frac{A}{Q_{0 \rightarrow 2}} = \frac{2}{24,5} \approx 0,082, \quad (26)$

что меньше, чем в «идеальном» случае.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0 + P_{\text{атм}}}{S} = 2 \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = 2 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+2)F_0}{S} = 4 \frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+2)F_0 l_0}{\nu R} = 4 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n+1)F_0}{S} = 5 \frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n+1)mF_0 l_0}{\nu R} = 10 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты равно

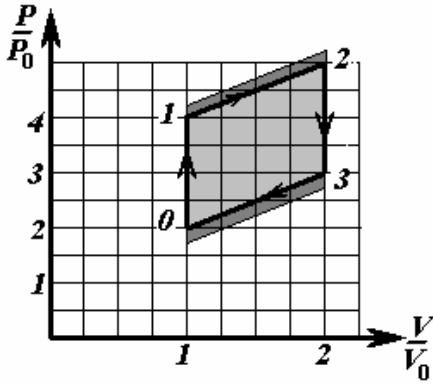
$$Q_{0 \rightarrow 2} = \Delta U_{0 \rightarrow 2} + A_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_0) + \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = 24,5 F_0 l_0 \quad (25)$$

Соответственно, коэффициент полезного действия равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{0 \rightarrow 2}} = \frac{2}{24,5} \approx 0,082, \quad (26)$$

что меньше, чем в «идеальном» случае.

Часть 3. При учете силы трения к рассмотренному циклу добавятся две узкие «полоски», иллюстрирующие преодоление этих сил, что приведет к увеличению теплоты, сообщаемой нагревателем. Следует особо отметить, что на этапе расширения сила трения приводит к увеличению давления газа, а на участке сжатия к его уменьшению.



Значения характеристик газа для данного цикла представлены в таблице 3. Таблица 3.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0 + P_{\text{атм}} - F_{\text{тр}}}{S} = 1,9 \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = 1,9 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+2)F_0 + F_{\text{тр}}}{S} = 4,1 \frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+2,1)F_0 l_0}{\nu R} = 4,1 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n+1)F_0 + F_{\text{тр}}}{S} = 5,1 \frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n+1,1)mF_0 l_0}{\nu R} = 10,2 \frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Расчет количества полученной теплоты имеет вид

$$Q_{0 \rightarrow 2} = \Delta U_{0 \rightarrow 2} + A_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_0) + \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} F_0 l_0 \cdot 8,3 + \frac{1}{2} F_0 l_0 \cdot 9,2 = 25,35 F_0 l_0 \quad (28)$$

Следовательно, коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A}{Q_{0 \rightarrow 2}} = \frac{2}{25,35} \approx 0,079 \quad (29)$$

Как видно, значение К.П.Д. почти совпадает с предыдущим значением. Поэтому можно провести приближенный расчет. Найдем, насколько увеличится количество полученной газом

теплоты $\delta Q_{0 \rightarrow 2}$ из-за наличия трения. Имеется две причины увеличения этой теплоты: во-первых, увеличение изменения температуры (начальная температура чуть ниже на величину $\delta T_0 = \frac{F_{\text{тр}} l_0}{\nu R}$, а конечная чуть выше $\delta T_2 = \frac{m F_{\text{тр}} l_0}{\nu R}$); во-вторых, незначительно увеличивается давление в процессе расширения $\delta P_{1 \rightarrow 2} = \frac{F_{\text{тр}} l_0}{S}$. Поэтому

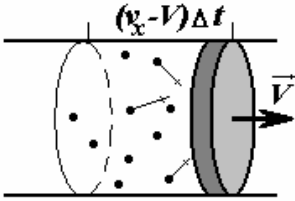
$$\delta Q_{0 \rightarrow 2} = C_V(\delta T_0 + \delta T_2) + \delta P_{1 \rightarrow 2} \Delta V = \frac{5}{2}(m+1) \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} F_0 l_0 + (m-1) \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} F_0 l_0 = 7,5 \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} F_0 l_0 = 0,75 F_0 l_0$$

Теперь изменение К.П.Д. можно рассчитать по формулам

$$\begin{aligned} \eta + \delta\eta &= \frac{A}{Q_{0 \rightarrow 2} + \delta Q_{0 \rightarrow 2}} \approx \frac{A}{Q_{0 \rightarrow 2}} \left(1 - \frac{\delta Q_{0 \rightarrow 2}}{Q_{0 \rightarrow 2}} \right) \Rightarrow \\ \delta\eta &= -\eta \frac{\delta Q_{0 \rightarrow 2}}{Q_{0 \rightarrow 2}} = -\frac{0,082 \cdot 0,75}{24,5} \approx -0,0025 = -0,2\% \end{aligned} \quad (30)$$

Часть 4

4.1 Основной причиной того, что поршень перестанет ускоряться, является то обстоятельство, что давление газа на движущийся поршень отличается от давления на неподвижную преграду. Найдем, какое давление оказывает газ на поршень,



движущийся с постоянной скоростью V , используя традиционные методы МКТ. Будем считать, что скорость движения поршня V , значительно меньше средней скорости теплового движения молекул. Молекула, имеющая проекцию скорости v_x (нормальную к поверхности), при ударе передает поршню импульс

$$\Delta p_x = 2m(v_x - V). \quad (1)$$

Число молекул, имеющих скорость близкую к v_x и достигших поршня за время Δt , равно

$$\Delta n = n(v_x - V)S\Delta t. \quad (2)$$

Для вычисления давления необходимо провести усреднение по возможным значениям скоростей молекул

$$\begin{aligned} P &= \left\langle \frac{\Delta p_x \Delta n}{S \Delta t} \right\rangle = 2mn \langle (v_x - V)^2 \rangle \approx 2mn (\langle v_x^2 \rangle - 2V \langle v_x \rangle) = \\ &= 2mn \langle v_x^2 \rangle \left(1 - 2 \frac{V \langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} \right) \approx P_0 \left(1 - 2 \frac{V \langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

причем усреднение необходимо проводить по молекулам, нормальные составляющие скоростей которых лежат в интервале $v_x \in [V, +\infty]$. Для оценки средних величин, стоящих в выражении (3), примем, что средняя проекции скорости примерно равна среднеквадратичному, а средний квадрат проекции легко определяется из формулы для среднего квадрата модуля скорости. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle v_x^2 \rangle &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \right) = \frac{1}{2} \frac{kT}{m} \\ \langle v_x \rangle &\approx \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{RT}{M}}\end{aligned}$$

таким образом, давление газа на движущийся поршень определяется выражением

$$P \approx P_0 \left(1 - 2 \frac{V \langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} \right) \approx P_0 \left(1 - 2V \sqrt{\frac{2M}{RT}} \right) = P_0(1 - \beta V), \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности равен

$$\beta \approx 2 \sqrt{\frac{2M}{RT}}. \quad (5)$$

Заметим, что более точный расчет с корректным вычислением средних приводит к результату $\beta = 2 \frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1,6 \sqrt{\frac{M}{RT}}$. Поршень будет двигаться с постоянной скоростью, когда силы давления газа на обе стороны поршня сравняются. В этом случае справедливо уравнение

$$(P + \Delta P)(1 - \beta \bar{v}) = P(1 + \beta \bar{v}), \quad (6)$$

из которого определяем скорость движения поршня

$$\bar{v} = \frac{\Delta P}{2\beta P} = \frac{\Delta P}{P} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{RT}{2M}} \approx 0,13 \frac{M}{c}. \quad (7)$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta P}{2\beta P} = \frac{\Delta P}{P} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{RT}{2M}} \approx 0,13 \frac{M}{c}. \quad (7)$$

4.2 Мы показали, что сила давления на «убегающий» поршень меньше среднего давления газа. Следовательно, для того чтобы в рассматриваемом двигателе поршень перемещался, необходимо увеличить среднее давление газа. Требуемое увеличение давления определяется из формулы (4)

$$\delta P \approx \beta P \bar{v}. \quad (1)$$

Такое увеличение потребует увеличения количества теплоты, потребляемой от нагревателя, это увеличение оценивается также, как и при учете силы трения

$$\delta Q_{0 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} \nu R \frac{2l_0 S \delta P}{\nu R} + \delta P (m-1) l_0 S \approx Q_{0 \rightarrow 2} \frac{\delta P}{P}. \quad (2)$$

Соответственно уменьшается коэффициент полезного действия двигателя

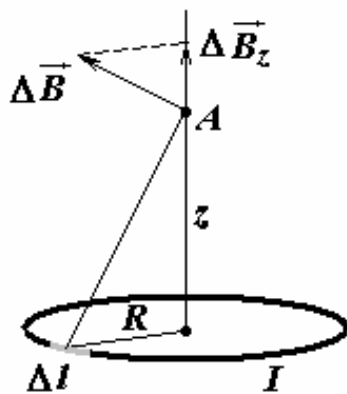
$$\delta \eta = -\eta \frac{\delta Q_{0 \rightarrow 2}}{Q_{0 \rightarrow 2}} = -\eta \frac{\delta P}{P} = \eta \beta \bar{v} \approx -0,005 = -0,5\%. \quad (3)$$

Добавление, не входящее в основное решение. Вычисление коэффициента β . Расчет проведен с точностью до первой степени скорости движения поршня

$$\begin{aligned}
\langle v_x^2 \rangle &= \int_V^\infty v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x^2 \varphi(v_x) dv_x - \int_0^V v_x^2 \varphi(v_x) dv_x \approx \\
&\approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty v_x^2 \varphi(v_x) dv_x - \frac{1}{2} ([v_x^2 \varphi(v_x)]_0 + [v_x^2 \varphi(v_x)]_V) V = \\
&= \frac{1}{6} \langle v^2 \rangle - \frac{1}{2} V^3 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \approx \frac{1}{2} \frac{kT}{m} \\
\langle v_x \rangle &= \int_V^\infty v_x \varphi(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x \varphi(v_x) dv_x - \int_0^V v_x \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \\
\beta &= 2 \frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1,6 \sqrt{\frac{M}{RT}} \\
&= \frac{1}{6} \langle v^2 \rangle - \frac{1}{2} V^3 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \approx \frac{1}{2} \frac{kT}{m} \\
\langle v_x \rangle &= \int_V^\infty v_x \varphi(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x \varphi(v_x) dv_x - \int_0^V v_x \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \\
\beta &= 2 \frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1,6 \sqrt{\frac{M}{RT}}
\end{aligned}$$

Решение 11-3

Часть 1. «Магнитное поле»



1.1 Для определения индукции на оси кольца (обозначим ось Z) следует воспользоваться законом Био-Саварра-Лапласа. Выделим на кольце небольшой элемент длиной Δl , который создает в точке A магнитное поле индукции $\vec{\Delta B}$. Из симметрии системы следует, что суммарный вектор индукции направлен вдоль оси системы. Поэтому для его вычисления достаточно просуммировать проекции векторов индукции, создаваемые отдельными элементами тока кольца

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi (R^2 + z^2)} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I \Delta l R}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Такое суммирование выполняется элементарно (заменой длины выбранного элемента кольца на его полную длину), откуда и следует приведенная в условии формула

$$B_z = \mu_0 I N \frac{R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = B_0 \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1)$$

где обозначено $\xi = \frac{z}{R}$, множитель B_0 имеет смысл индукции в центре кольца и равен

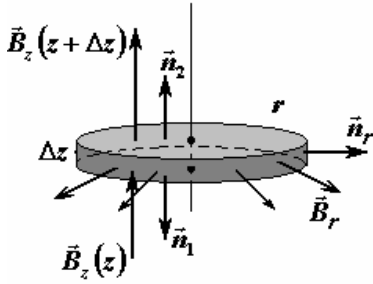
$$B_0 = \frac{\mu_0 I N}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 100}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} \approx 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}. \quad (2)$$

1.2. Для вычисления радиальной составляющей вектора магнитной индукции можно воспользоваться теоремой о магнитном потоке, который равен нулю через любую замкнутую поверхность. В качестве таковой выберем тонкий цилиндр малой толщиной Δz и радиуса r , ось которого совпадает с осью катушки. Из теоремы о магнитном потоке следует выражение

$$B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2 - B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r = 0,$$

из которого определяем радиальную составляющую поля

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{r}{2} B_0 \cdot \frac{3}{2} \frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{2} B_0 \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{r}{R}. \quad (3)$$



Часть 2. «Опилки» 2.1 Так частицы опилок малы, то оседать они будут равномерно с установившейся скоростью $\bar{v}$ которая определяется из условия равновесия сил

$$mg - F_A = \beta \bar{v}.$$

Выражая силу тяжести и силу Архимеда через плотности железа и масла, получим равенство $\frac{4}{3}\pi a^3(\rho - \rho_0)g = \beta \bar{v}$, из которого определим неизвестный коэффициент силы сопротивления

$$\beta = \frac{4\pi a^3(\rho - \rho_0)g}{3\bar{v}} = \frac{4\pi (1,0 \cdot 10^{-4})^3 \cdot 7,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 10^{-4}} = 2,87 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{с}}. \quad (4)$$

2.2 Сила взаимодействия магнитного диполя с магнитным полем пропорциональна произведению индукции поля магнитного момента. Кроме того, индуцированный момент пропорционален индукции поля. Этих рассуждений достаточно для обоснования утверждения о том, что сила пропорциональна квадрату индукции поля.

2.3 Для определения силы, действующей на частицу, обладающую



магнитным моментом, представим ее в виде кругового тока силой i и некоторого радиуса a (не обязательно совпадающим с размером частицы). Сила Ампера определяется радиальной составляющей вектора индукции, и равна (с учетом формулы (3))

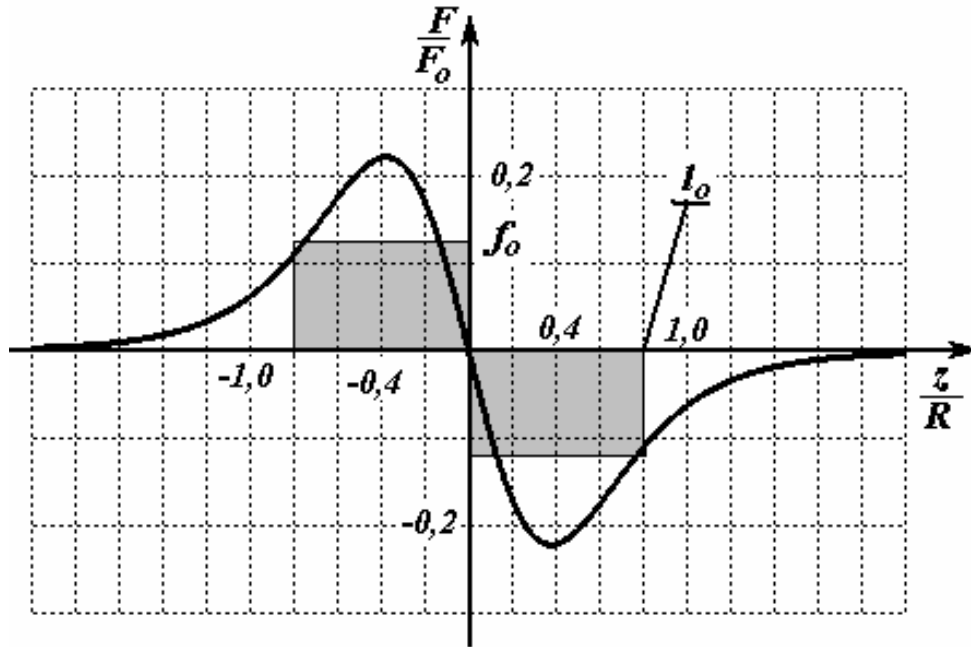
$$F_m = -i \cdot 2\pi a \cdot B_r = i \cdot 2\pi a \cdot \frac{a}{2} \frac{dB_z}{dz} = \pi a^2 \frac{dB_z}{dz} = p_m \frac{dB_z}{dz}.$$

Существенно, что рассматриваемая сила зависит только от магнитного момента (а не от «придуманных» параметров i , a), продолжая цепочку преобразований, получим окончательное выражение

$$\begin{aligned} F_m &= p_m \frac{dB_z}{dz} = \chi V \frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dz} = \chi V \frac{d}{dz} \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = -\chi V \frac{3B_0^2}{\mu_0 R} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^4} = \\ &= -F_0 \frac{\xi}{(1+\xi^2)^4} \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначено

$$F_0 = \chi V \frac{3B_0^2}{\mu_0 R} = 800 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{-4})^3 \frac{3(6,28 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \approx 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$



Анализ функции (5) может быть проведен стандартными методами. Так, например, функция антисимметрична. Вычисляя производную и полагая ее равной нулю

$$\left(\frac{\xi}{(1+\xi^2)^4} \right)' = \frac{(1+\xi^2)^4 - \xi \cdot 4(1+\xi^2)^3 \cdot 2\xi}{(1+\xi^2)^8} = \frac{(1+\xi^2) - 8\xi^2}{(1+\xi^2)^5} = 0,$$

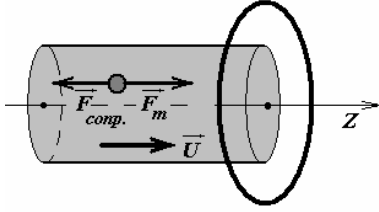
определим положение экстремумов $\xi^* = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,38$; и экстремальные значения функции в этой точке $F_{m \max} = \pm F_0 \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{7^4}{8^4} \approx \pm 0,222 F_0 = \pm 7,02 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$ Тем самым можно определить параметры предлагаемой аппроксимации

$$l_0 = \frac{2R}{\sqrt{7}} = 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ м; } f_0 = 3,56 \cdot 10^{-6} \text{ Н.} \quad (6)$$

На рисунке показан график этой функции и ее предлагаемая аппроксимация. Заметим, что коэффициент пропорциональности в зависимости $f_0 = AI^2$, численно равен найденному значению (6), так как эта величина рассчитана при силе тока в 1 ампер, поэтому $A = 3,56 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$.

Часть 3. «Течение и расход»

В этой основной части задачи отметим, что влияние железных опилок на движение масла возможно лишь тогда, когда они движутся относительно масла! Действительно, если опилки жестко «скреплены» с движущейся жидкостью и равномерно в ней распределены, то суммарная сила, действующая на такую жесткую смесь равна нулю – силы, действующие с разных сторон кольца, уравниваются друг друга. Очевидной причиной различия скоростей является «магнитная сила, действующая на опилки, но не на масло. Таким образом, необходимо рассмотреть движение опилок, с учетом того, что их скорости могут отличаться от скорости масла, которая в



свою очередь постоянна по всей длине трубки, вследствие постоянства потока. Кроме того, в рамках сделанного приближения мы считаем скорость жидкости постоянной и в поперечном сечении трубки. Итак, обозначим постоянную скорость движения масла u . Рассмотрим движение отдельной железной частицы, скорость которой обозначим v . На основании второго закона Ньютона, уравнение ее движения имеет вид

$$ma = \beta(u - v) + F_m(z). \quad (1)$$

где первое слагаемое описывает силу сопротивления, а второе – силу со стороны магнитного поля, вычислением которой мы так долго занимались. Так как частица мала, то можно в очередной раз использовать квазистационарное приближение, считая, что в любой момент времени суммарная сила, действующая на частицу равна нулю (т.е. полагая $ma = 0$). В этом вполне обоснованном приближении можно выразить скорость частицы как функцию координаты

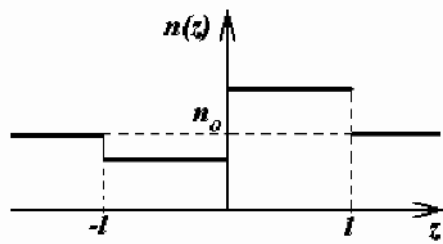
$$v(z) = u + \frac{F_m(z)}{\beta}. \quad (2)$$

В установившемся движении среднее число опилок, проходящее через любое поперечное сечение трубки постоянно (выполняется «закон сохранения числа опилок»), что может быть выражено очевидным уравнением

$$n_0 u = n(z) v, \quad (3)$$

которое с использованием выражения (2) позволяет найти концентрацию опилок как функцию координаты

$$n(z) = \frac{n_0 u}{v(z)} = \frac{n_0 u}{u + \frac{F_m(z)}{\beta}} = \frac{n_0}{1 + \frac{F_m(z)}{\beta u}}. \quad (4)$$



Для используемой нами зависимости силы от координаты, эта зависимость качественно представлена на рисунке: при приближении к катушке скорость опилок возрастает, а их концентрация падает, за катушкой ситуация обратная. Следовательно, за катушкой создается повышенная концентрация медленно движущихся опилок, которые тормозят движение масла.

3.2 Прежде чем переходить к рассмотрению довольно сложного выражения (4) оценим отношение модулей сил, действующих на отдельную частицу. Для оценки силы вязкого трения, действующей на покоящуюся частичку βu_0 , находящуюся в потоке масла, выразим скорость движения масла в отсутствии магнитного поля из известного значения расхода масла

$$u_0 = \frac{q_0}{\pi r_0^2} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{60\pi \cdot 10^{-6}} \approx 5,31 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

в этом случае сила вязкого трения $\beta u_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$ значительно больше вычисленной ранее магнитной силы f_0 . Поэтому добавка к единице в знаменателе функции (4) мала, поэтому это выражение можно упростить

$$n(z) = n_0 \left(1 + \frac{F_m(z)}{\beta u} \right)^{-1} \approx n_0 \left(1 - \frac{F_m(z)}{\beta u} \right).$$

Если жидкость действует на частицу с силой $\beta(u-v)$, то с такой же по модулю силой частица действует на жидкость. Выделим в движущейся жидкости слой толщиной Δz , суммарная сила³, действующая на жидкость со стороны опилок в этом слое, будет равна

$$\delta(\Delta P_m) = n\Delta z\beta(v-u) = n\Delta zF_m(z). \quad (5)$$

здесь $n\Delta z$ - число опилок в слое единичной площади, кроме того учтено квазистационарное приближение уравнивающее силу вязкости с магнитной силой. Для того чтобы найти суммарное давление необходимо просуммировать выражение (5) по всей длине трубки, такое суммирование в рассматриваемом случае проводится тривиально (необходимо просуммировать два слагаемых, соответствующих двум областям, где скорость опилок отлична от скорости масла

3 3

$$\Delta P_m = n_0 \left(1 - \frac{f_0}{\beta u} \right) f_0 l_0 - n_0 \left(1 + \frac{f_0}{\beta u} \right) f_0 l_0 = -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u}. \quad (6)$$

В соответствии с нашими качественными рассуждениями это дополнительное давление оказалось отрицательным, то есть действительно, магнитное поле, действуя непосредственно только на опилки, опосредовано тормозит масло.

3.3 Относительное изменение расхода ввиду малости дополнительного давления также будет мало, поэтому может быть найдено приближенными методами. Запишем выражения для расхода масла в двух случаях в присутствии поля и без него

$$\begin{aligned} q_0 &= C\Delta P_0 \\ q &= C(\Delta P_0 + \Delta P_m) \end{aligned} \quad (7)$$

и найдем их отношение

$$\frac{q}{q_0} = 1 + \frac{\Delta P_m}{\Delta P_0} = 1 - 2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u \Delta P_0}. \quad (8)$$

Нет необходимости решать это уравнение точно (обратите внимание - справа в уравнении присутствует неизвестная скорость u , пропорциональная расходу масла), так как само уравнение является приближенным, поэтому, не теряя степени точности, можно считать, что $u \approx u_0$ и записать

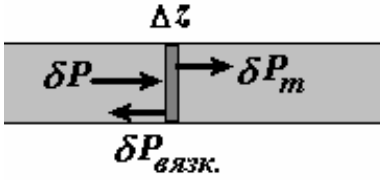
$$\frac{q}{q_0} = 1 + \frac{\Delta P_m}{\Delta P_0} = 1 - 2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u_0 \Delta P_0}, \quad (9)$$

откуда следует

$$\frac{\delta q}{q_0} = -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta (u_0 + \delta u) \Delta P_0} \approx -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u_0 \Delta P_0}. \quad (10)$$

Подстановка численных значений дает результат $\frac{\delta q}{q_0} \approx -1,3 \cdot 10^{-2}$.

Как следует из формулы (10) относительное изменение расхода пропорционально квадрату силы, действующей на опилки, которая в свою очередь пропорциональна квадрату силы тока в кольце, следовательно, уменьшение расхода пропорционально четвертой степени силы тока в кольце, $-\frac{\delta q}{q_0} \propto I^4$.

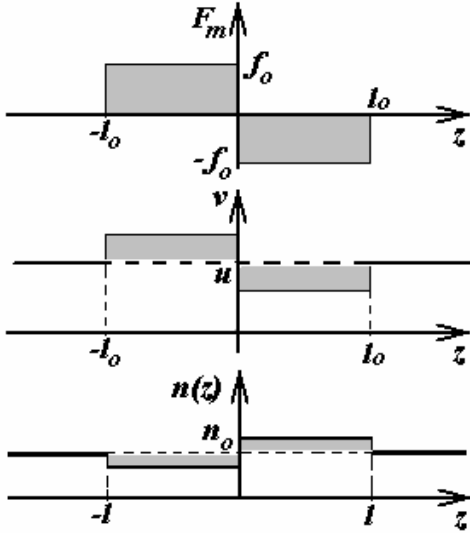


3.4 Получим точное уравнение, определяющее скорость установившегося движения масла. Запишем условие стационарности потока масла для тонкого слоя толщиной Δz

$$\delta P + \delta P_m - \delta P_{\text{вязк.}} = 0, \quad (1)$$

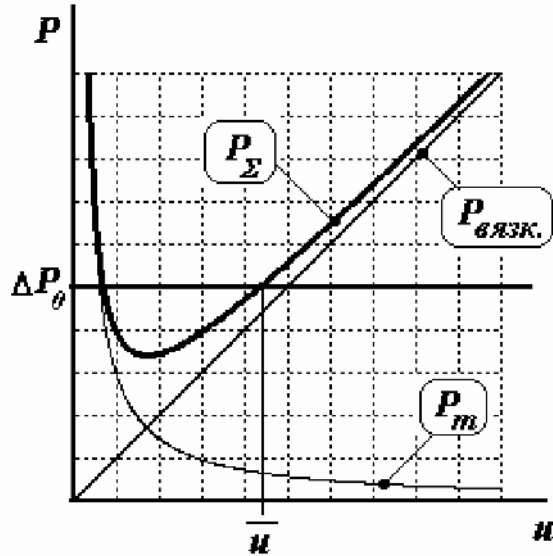
в котором $\delta P, \delta P_m, \delta P_{\text{вязк.}}$ - давления внешнее, магнитное и вязкое, соответственно.

Просуммируем это выражение по всей длине трубки. Отдельные слагаемые будут иметь вид: $\sum_L \delta P = \Delta P_0$ - приложенная к концам трубки разность давлений; $\sum_L \delta P_{\text{вязк.}} = C u L = \Delta P_0 \frac{u}{u_0}$ - падение давления вследствие сил вязкости; $\sum_L \delta P_m = \sum_L n(z) \Delta z F_m(z)$ - суммарное давление со стороны опилок на масло.



Последнюю сумму легко вычислить для рассматриваемой нами модели распределения сил по длине трубки. На рисунке показаны зависимости от координаты силы, действующей на частицу, скорости частиц и их концентрации, с помощью этого рисунка находим

$$\begin{aligned} \sum_L \delta P_m &= \sum_L n(z) \Delta z F_m(z) = \frac{n_0 f_0 l_0}{1 + \frac{f_0}{\beta u}} - \frac{n_0 f_0 l_0}{1 - \frac{f_0}{\beta u}} = \\ &= -2n_0 f_0^2 l_0 \frac{\beta u}{(\beta u)^2 + f_0^2}. \end{aligned}$$



Таким образом, получаем уравнение, определяющее скорость u установившегося движения масла.

$$\Delta P_0 = \Delta P_0 \frac{u}{u_0} + 2n_0 f_0^2 l_0 \frac{\beta u}{(\beta u)^2 - f_0^2} = 0. \quad (2)$$

Проанализируем возможные решения этого уравнения. Для этого построим примерные графики зависимостей давлений от скорости движения масла. Как следует из графика, данное

уравнение может иметь два корня, больший из них дает интересующее нас значение установившейся скорости, меньший неустойчив (что легко показать). При увеличении силы тока возрастает магнитное давление и при некотором значении последнего уравнение (2) не будет иметь корней, что соответствует остановке масла. Таким образом, ответ на поставленный вопрос математически формулируется так: при каких условиях уравнение (2) корней не имеет. Для удобства анализа еще раз перепишем это уравнение

$$\Delta P_0 = \Delta P_0 \frac{u}{u_0} + 2n_0 l_0 \beta u_0 \left(\frac{f_0}{\beta u_0} \right)^2 \frac{\frac{u}{u_0}}{\left(\frac{u}{u_0} \right) + \left(\frac{f_0}{\beta u_0} \right)^2}$$

и введем обозначения: $\frac{u}{u_0} = x$, $a = \frac{n_0 l_0 \beta u_0}{\Delta P_0}$, $b = \frac{f_0}{\beta u_0}$, окончательно получим уравнение в «приведенном» виде

$$x + 2ab^2 \frac{x}{x^2 - b^2} = 1. \quad (3)$$

Это уравнение не будет иметь корней, если минимальное значение функции $F(x) = x + 2ab^2 \frac{x}{x^2 - b^2}$ превысит единицу. Оценим численные значения параметров этого уравнения

$$a = \frac{n_0 l_0 \beta u_0}{\Delta P_0} = \frac{10^{10} \cdot 7,56 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{10^3} \approx 11,3$$

$$b = \frac{f_0}{\beta u_0} \approx \frac{3,56 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-4}} \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$$

Так как величина b мала, то рассматриваемую функцию можно упростить $F(x) \approx x + \frac{2ab^2}{x}$. Минимального значения эта функция достигает при $x = \sqrt{2ab^2}$ и равно $F_{\min} = 2b\sqrt{2a}$. Таким образом, условие прекращения течения масла имеет вид

$$2b\sqrt{2a} \geq 1, \text{ или}$$

$$\frac{f_0}{\beta u_0} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta P_0}{n_0 l_0 \beta u_0}}, \quad (4)$$

Наконец вспомним, что величина f_0 так является коэффициентом пропорциональности между силой, действующей на частицу и квадратом силы тока, поэтому окончательное выражения для силы тока, при котором произойдет остановка масла имеет вид

$$I \geq \sqrt{\frac{\beta u_0}{2f_0}} \sqrt{\frac{\Delta P_0}{n_0 l_0 \beta u_0}} \approx 2,5 \text{ A.}$$

¹ Можно использовать закон Ома и в «обычной» форме – «для участка цепи». ² Конечно, в качестве частоты колебаний можно взять собственную частоту колебаний ω 0

³ Будем считать, что выделенный слой имеет единичную площадь поперечного сечения, тогда мы с полным основанием можем говорить о давлении опилок на жидкость.