

Дробь Мюнхгаузена

Условие

Задание 2. «Дробь Мюнхгаузена»

Согласно дошедшим до наших дней абсолютно правдивым рассказам барона, в старину для производства охотничьей дроби расплавленный свинец капали с высоких башен. Во время полета капля принимала сферическую форму под действием сил поверхностного натяжения и успевала остыть до температуры кристаллизации. Таким образом, на землю «с неба» (в буквальном смысле этого слова) сыпалась «готовая продукция»...

Надежное производство мелкой дроби радиусом $r_0 = 1,0$ мм обеспечивалось при минимальной высоте башни $h_1 = 50$ м. При меньших высотах капли свинца не успевали отвердевать.

Во время войны с «крупным неприятелем» барону потребовалось наладить производство крупной дроби радиусом $r_1 = 2,0$ мм.

****При какой минимальной высоте новой башни H это возможно?***

Считайте, что капли жидкого свинца капаят с башни при температуре плавления, а падают на землю полностью отвердевшими.

Решите эту задачу в двух случаях.

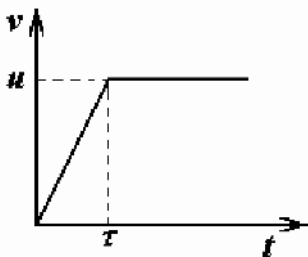
2.1 Пренебрегая силой сопротивления воздуха.

2.2 С учетом силы сопротивления воздуха.

Этот случай гораздо сложнее, поэтому немного вам поможем.

Описание падения тела с учетом сопротивления воздуха представляет собой достаточно сложную задачу: тело начинает двигаться с ускорением свободного падения; его скорость растет, а ускорение уменьшается; наконец, скорость тела достигает своего максимального значения, и далее тело движется равномерно с этой скоростью.

С хорошей точностью такое движение можно рассматривать как совокупность равноускоренного движения (с ускорением свободного падения), а по достижении скорости установившегося движения – движения равномерного. На рисунке показана предлагаемая зависимость скорости от времени.



Наконец, еще несколько «подсказок». 1. Количество теплоты Q , полученное (отданное) телом с площадью поверхности S за промежуток времени Δt :

$$Q = \alpha(T - T_0)S\Delta t,$$

где $(T - T_0)$ — разность температур тела и окружающей среды, α — коэффициент теплоотдачи, зависящий только от физических свойств контактирующих материалов.

2. Сила сопротивления воздуха зависит от скорости движения тела v и описывается формулой

$$F_{\text{сопр.}} = C_x \frac{1}{2} \rho_0 v^2 S_x,$$

где S_x — площадь поперечного сечения тела, ρ_0 — плотность воздуха, C_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления, для тел сферической формы $C_x \approx 0,60$.

3. Объем шара радиуса r равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, площадь его поверхности $S = 4\pi r^2$.

4. Плотность воздуха $\rho_0 = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность свинца $\rho_1 = 11 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение

Задание 2. «Дробь Мюнхгаузена»

2.1 Поскольку силой сопротивления воздуха можно пренебречь, то дробинка будет свободно падать с башни высотой h с ускорением свободного падения g без начальной скорости. Для этого ей потребуется время

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Поскольку температура свинца во время кристаллизации остается постоянной, то при радиусе дробинки r за время полета (см. подсказку) она отдаст в окружающее пространство количество теплоты

$$Q = \alpha(T - T_0)St = \alpha(T - T_0)4\pi r^2 t, \quad (2)$$

где T — температура плавления свинца, T_0 — температура окружающей среды. С другой стороны это количество теплоты может быть найдено из условия полной кристаллизации свинца за время полета

$$Q = m\lambda = \rho V\lambda = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda, \quad (3)$$

где ρ и λ — соответственно плотность и удельная теплота кристаллизации (плавления) свинца. Приравнявая выражения (2) и (3), с учетом (1) найдем

$$h = \frac{g}{18} \left(\frac{\rho\lambda}{\alpha(T - T_0)} \right)^2 r^2. \quad (4)$$

Повторяя подобные рассуждения для «крупной» дроби, получим

$$H = \frac{g}{18} \left(\frac{\rho\lambda}{\alpha(T - T_0)} \right)^2 R^2. \quad (5)$$

Разделив (5) на (4), окончательно найдем

$$H = \frac{R^2}{r^2} h = \left(\frac{R}{r} \right)^2 h = 200 \text{ м} = 2,0 \cdot 10^2 \text{ м}. \quad (6)$$

2.2 При описании падения «дробинки» с учетом силы сопротивления воздуха, заметим, что ее скорость $v(t)$ будет расти с переменным ускорением до некоторого

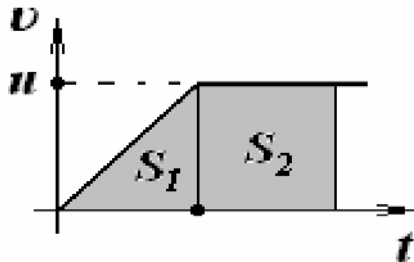


Рис. 21

установившегося значения u , а далее падение будет равномерным.

Для оценки высоты башни H в этом случае примем, что характер зависимости скорости дробинки от времени $v(t)$ имеет вид, представленный на рис. 21, т.е. состоит из участка равноускоренного движения длиной S_1 и участка равномерного движения длиной S_2 . Соответственно

$$S_1 + S_2 = H \quad (7)$$

где $S_1 = \frac{u^2}{2g}$, $S_2 = u(t - \frac{u}{g})$, t — искомое время падения с башни высотой H в рамках данной модели. С учетом этого получаем

$$t = \frac{H}{u} + \frac{u}{2g} \quad (8)$$

По условию задачи за время полета t капля должна полностью кристаллизироваться. Из уравнения теплового баланса в этом случае имеем

$$\alpha(T - T_0)4\pi r^2 t = \alpha(T - T_0)4\pi r^2 \left(\frac{H}{u} + \frac{u}{2g} \right) = m\lambda = \rho V \lambda = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \lambda \quad (9)$$

Из (9) найдем связь между высотой башни H и описанными параметрами

$$H = \frac{\rho \lambda r u}{3\alpha(T - T_0)} - \frac{u^2}{2g} \quad (10)$$

Как следует из (10), одним из параметров, определяющих высоту башни является скорость u установившегося падения капли. Для ее нахождения воспользуемся II законом Ньютона, согласно которому в этом состоянии сила тяжести должна быть равна по модулю силе сопротивления воздуха

$$mg = \frac{C_x}{2} \rho_0 u^2 \pi r^2 \quad (11)$$

Из (11) с учетом того, что масса капли

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

найдем

$$u = \sqrt{\frac{8\rho g r}{3C_x \rho_0}} \quad (12)$$

Используя выражения (10) - (12), для высоты башни H_2 , необходимой для производства «крупной» дробы радиусом r_2 , получим

$$H_2 = \frac{r_2 u_2}{r_1 u_1} \left(H_1 + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \frac{u_2^2}{2g} \quad (13)$$

Вычисляя с помощью (12) скорости $u_1 = 19,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $u_2 = 28,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и подставляя полученные значения в (14), окончательно найдем

$$H_2 = 1,6 \cdot 10^2 \text{ м.} \quad (14)$$

Из сравнения (14) и (6) видим, что численное значение для высоты башни стало меньше в случае «равноускоренно-равномерного» движения. Это нисколько не удивительно, т.к. сила сопротивления воздуха создает «парашютный эффект», увеличивая время падения капли с данной высоты (средняя скорость падения уменьшается). Таким образом, капля успевает кристаллизироваться и при падении с меньшей высоты, чем в случае только равноускоренного движения.

В заключение заметим, что выражение (10) не имеет смысла при больших значениях u , поскольку при этом высота башни H получается отрицательной. Это имеет очевидный физический смысл — в нашей модели высота башни изначально предполагалась достаточной для того, чтобы капля «успела» разогнаться до постоянной скорости u . В противном случае будет отсутствовать участок равномерного движения капли. Сформулируем критерий достаточности количественно

$$H \geq H^* = S_1. \quad (15)$$