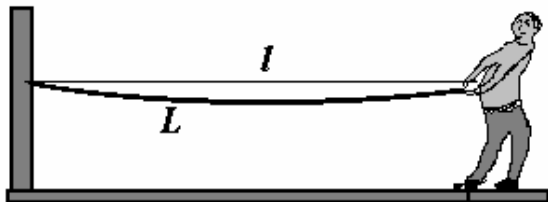


Разминка

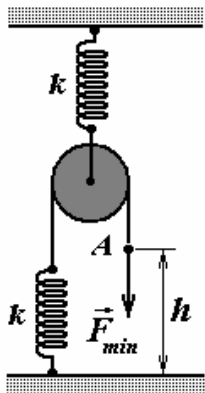
Условие

Задание 10. 1. «Разминка»

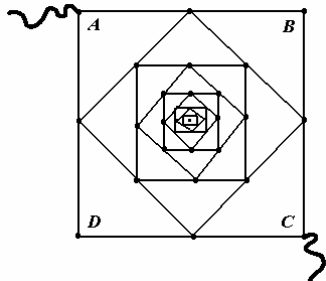


Задача 1.1 Человек удерживает длинную гибкую цепь массой $m = 5,0$ кг и длиной $L = 5,0$ м, второй конец которой привязан к стене дома. Концы цепи находятся на одном уровне, расстояние между ними равно $l = 0,90L$. Оцените силу, которую человек должен прикладывать к цепи, чтобы удерживать ее в покое. Оцените также минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы полностью выпрямить цепь в горизонтальную прямую.

Задача 1.2 Через легкий блок, подвешенный на пружине жесткостью $k = 0,50 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, перекинута невесомая нить, прикрепленная при помощи такой же пружины к земле. Конец A нити находится на высоте $h = 10$ см от земли. Какой минимальной силой $\vec{F}_{\min}$, приложенной к концу A веревки, можно притянуть ее к земле?



Задача 1.3 «Сопrotивление фрактала» Найдите сопротивление R_{AC} бесконечной цепочки квадратов, вложенных друг в друга, если каждый следующий квадрат соединяет середины сторон предыдущего. Все квадраты изготовлены из однородной достаточно тонкой проволоки. Сопrotивление стороны наибольшего квадрата $R_{AB} = 1,5$ Ом.



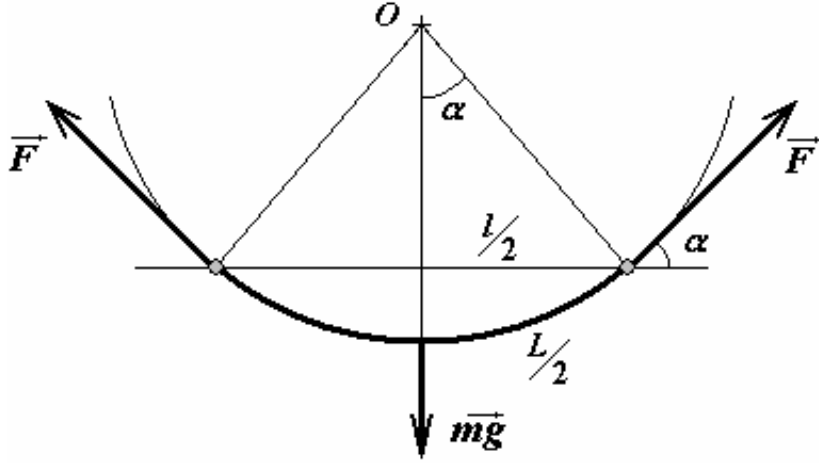
Решение

Задача 10.1.1

Условие равновесия цепи в проекции на вертикальное направление имеет вид

$$2F \sin \alpha = mg, \quad (1)$$

где F - сила натяжения цепи в крайних точках и равная ей сила, с которой надо удерживать веревку. Для определения угла α между касательной к цепи и горизонтом необходимо знать форму, которую принимает цепь под действием силы тяжести. Решение этой проблемы известно, но достаточно сложно. В данном случае расстояние между концами цепи немного меньше ее длины. Поэтому цепь изогнута слабо, ее профиль можно



аппроксимировать кривой второго порядка – проще всего дугой окружности. В этом приближении найти угол α не составляет труда. Проведя перпендикуляры к касательным в крайних точках, определим центр окружности O как точку их пересечения. Теперь длина участка цепи между нижней и крайней точками (она равна половине длины всей цепи $\frac{L}{2}$) выражается формулой

$$\frac{L}{2} = R\alpha, \quad (2)$$

а длина половины хорды

$$\frac{l}{2} = R \sin \alpha \approx R \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) \quad (3)$$

где использована приближенная формула для синуса малого угла.

Отметим, что в линейном приближении различие между длиной дуги и стягивающей ее хорды отсутствует, поэтому необходимо использовать приближение следующего порядка. Из формул (3) – (2) получаем соотношение

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\alpha^2}{6}. \quad (4)$$

Обозначим $l = (1 - \eta)L$, где η - малый безразмерный параметр, согласно условию задачи $\eta = 0,10$. С использованием этого удобного обозначения значения искомого угла определяется формулой

$$\alpha \approx \sqrt{6\eta}. \quad (5)$$

Теперь из формулы (1) определяем значение силы

$$F = \frac{mg}{2 \sin \alpha} \approx \frac{mg}{2\sqrt{6\eta}} \approx 32H, \quad (6)$$

что больше половины веса веревки.

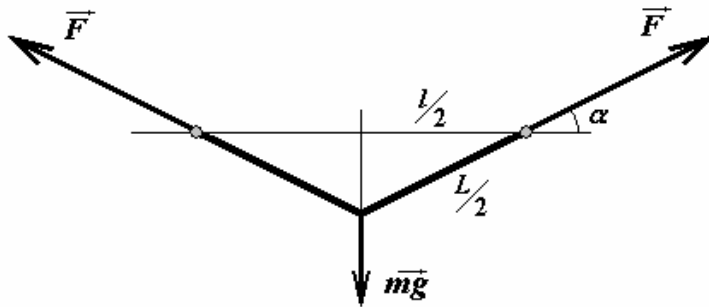
Для того чтобы оценить работу по выпрямлению веревки можно проинтегрировать выражение для силы в зависимости от параметра η (учитывая, что $x = (1 - \eta)L$, $dx = -Ld\eta$)

$$A = \int_l^L F dx = L \int_0^{\eta_0} F d\eta = \frac{mgL}{2\sqrt{6}} \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} = \frac{mgL\sqrt{\eta_0}}{\sqrt{6}} \approx 30 \text{ Дж.}$$

Дополнения.

1. Отметим, что для полного выпрямления веревки необходимо приложить бесконечно большую силу: из формулы (6) следует, что при $\eta \rightarrow 0$ $F \rightarrow \infty$. Тем не менее, работа, совершенная при выпрямлении веревки, конечна.*

2. Задача может быть решена и в более грубом приближении: если форму веревки считать в виде двух отрезков прямой линии.



В этом приближении зависимость угла наклона приложенной к веревке силы определяется из очевидного выражения $\cos \alpha = \frac{l}{L} = 1 - \eta$.

*Так как угол наклона мал, то допустимо использовать приближенную формулу $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда искомый угол описывается формулой $\alpha \approx \sqrt{2\eta}$, которая с точностью до постоянного коэффициента совпадает с использованной в решении формулой (5). Отличие между этими выражениями менее, чем в два раза, поэтому обе полученные оценки можно считать вполне приемлемыми.

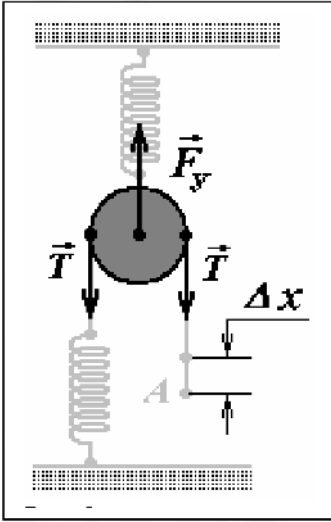
Задача 10.1.2

Если мысленно заменить верхнюю пружину нерастяжимой веревкой, то под действием силы $\vec{F}$, направленной вниз, нить через гладкий блок растянет нижнюю пружину вверх на величину

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k}.$$

Поскольку нить нерастяжима, то на такую же величину Δx_1 опустится конец A веревки.

Из условия равновесия конца A веревки следует, что сила натяжения нити при этом $T = F$.



Теперь «вернем» верхнюю пружину на место, ведь по условию задачи блок «подвижный». На блок вниз действуют две силы натяжения нити T (Рис. 2), а вверх — сила упругости $\vec{F}_y$ верхней пружины. Из условия равновесия блока получим

$$F_y = k\Delta x_2 = 2T = 2F \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{2F}{k},$$

где Δx_2 — абсолютная деформация верхней пружины. Следовательно, в положении равновесия нижний конец верхней пружины (центр блока) опустится на Δx_2 .

Поскольку при опускании центра блока на Δx_2 «освободится» участок нити длиной $2\Delta x_2$, то результирующее смещение Δx вниз конца нити A с учетом деформаций обеих пружин составит

$$\Delta x = \Delta x_1 + 2\Delta x_2 = \frac{F}{k} + 2\frac{2F}{k} = 5\frac{F}{k}.$$

Для касания веревкой земли должно быть выполнено условие

$$\Delta x = h \Rightarrow \frac{5F}{k} = h \Rightarrow F = \frac{kh}{5}.$$

Расчет дает

$$F = \frac{kh}{5} = 10 \text{ Н.} \quad (1)$$

Поскольку при меньшем значении силы F конец A веревки не дотянет до земли (колебания в системе отсутствуют), то (1) дает искомое значение $\vec{F}_{\min}$

$$F_{\min} = \frac{kh}{5} = 10 \text{ Н.}$$

Дополнение.

Решение данной задачи можно сделать и покороче. Обозначим Δx_1 - деформацию нижней пружины. Тогда из условия равновесия блока и закона Гука следует, что деформация верхней пружины должна быть в два раза больше $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$. Далее из условия не растяжимости веревки, переброшенной через блок, следует, что ее конец опустится на расстояние $h = 2\Delta x_2 + \Delta x_1 = 5\Delta x_1$. Наконец, искомая сила натяжения веревки равна силе упругости нижней пружины, то есть

$$F = k\Delta x_1 = \frac{kh}{5}.$$

Впрочем, эти элементарные выкладки нуждаются в физических обоснованиях, приведенных в основном решении.

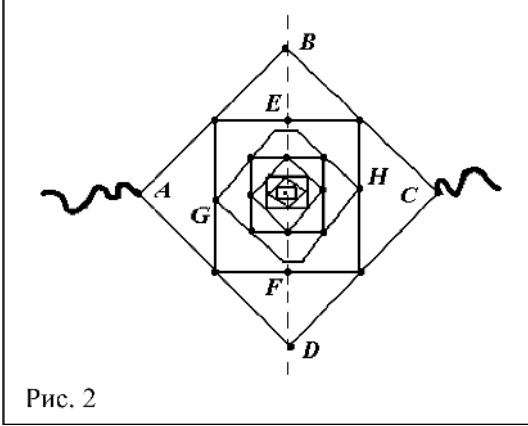


Рис. 2

Задача 10.1.3

Поскольку электрическое сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$ пропорционально длине l проводника, то можем заметить, что сопротивление R_{i+1} каждого следующего вложенного квадрата меньше сопротивления R_i предыдущего в $\sqrt{2}$ раз

$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Преобразуем цепь, разорвав ее в эквипотенциальных точках E и F (Рис.2), лежащих на оси симметрии BD фрактала. Это не изменит искомого сопротивления R_F фрактала, поскольку по «разорванным» малым перемычкам ток все равно не идет из-за отсутствия напряжения на них.

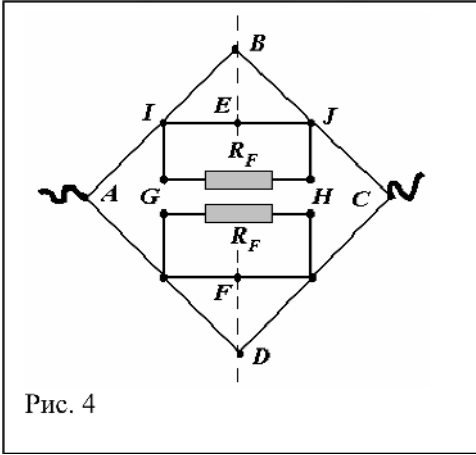
Однако теперь можем заметить, что цепь между точками G и H (см. рис. 2) также представляет собой бесконечный фрактал, начальный размер которого ровно в два раза меньше размера исходного фрактала.

Следовательно, в силу (1) (примененного дважды!), сопротивление R_{GH} цепи между указанными точками также в два раза меньше искомого сопротивления «большого» фрактала

$$R_{GH} = \frac{R_F}{2}. \quad (2)$$

С учетом (2) электрическую схему можно перечертить в виде, представленном на рис. 3.

Для дальнейшего преобразования схемы представим сопротивление $R_F/2$ как два параллельно соединенных сопротивления R_F , и вновь, в силу симметрии цепи, разорвем полученную схему в эквипотенциальных точках G и H . В результате получим еще более упрощенный вариант цепи фрактала, представленный на рис. 4.



Дальнейший расчет сопротивления цепи достаточно стандартен: нужно только помнить, что соединительные «проводочки» на данной схеме имеют разные сопротивления, каждое из которых пропорционально соответствующей длине.

Так для расчета сопротивления R_{IJ} цепи между точками I и J используем правила расчета для параллельного сопротивления

$$\frac{1}{R_{IJ}} = \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R} + \frac{1}{R_F + \frac{R}{\sqrt{2}}}, \quad (3)$$

где R_{AB} (сопротивление большой стороны фрактала) для удобства обозначено через R . Из (3) находим

$$R_{IJ} = \frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R}. \quad (4)$$

Соответственно, сопротивление R_{ABC} участка цепи найдем по правилам последовательного соединения

$$R_{ABC} = \frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R} + R. \quad (5)$$

Поскольку верхняя и нижняя части полученной цепи симметричны, то окончательное выражение для нахождения сопротивления фрактала принимает вид

$$R_F = \frac{R_{ABC}}{2} = \frac{\frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R} + R}{2}. \quad (6)$$

Относительно R_F (6) представляет собой квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})R_F^2 + 2\sqrt{2}RR_F - (1 + 2\sqrt{2})R^2 = 0,$$

решения которого находим сравнительно легко (у нас получилось всего лишь с третьей попытки!).

Отрицательный корень ($R_F = -0,984R$) отбрасываем сразу, как не имеющий физического смысла. Окончательно

$$R_F = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} R = 0,569 R. \quad (7)$$

Расчет по (7) дает численное значение сопротивления цепи бесконечного квадратного фрактала

$$R_{AC} = R_F = 0,85 \text{ Ом.}$$

