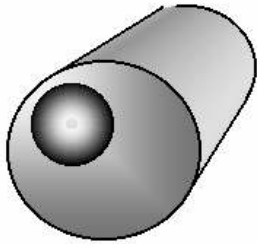


Дырявая разминка

Условие

Задание 1. «Дырявая разминка»

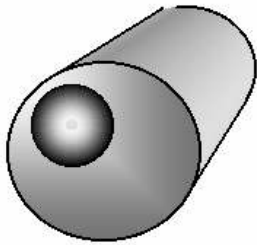
Данное задание состоит из трех не связанных между собой задач.



Задача 1.1 В сплошном однородно заряженном (плотность заряда $\rho_1 = 7,08 \cdot 10^{-8}$ Кл/м³) очень длинном цилиндре радиуса $R_1 = 10,0$ см вырезали цилиндрическую полость радиусом $R_2 = 2,0$ см, в которую вставили другой длинный однородно заряженный (плотность заряда $\rho_2 = 1,77 \cdot 10^{-7}$ Кл/м³) цилиндр радиуса, равного радиусу полости (рис. 1). Расстояние между осями цилиндров $a = 5,0$ см. Относительные диэлектрические проницаемости веществ, из которых сделаны цилиндры $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

1.1.1 Найдите напряженность электрического поля внутри малого цилиндра.

1.1.2 Изобразите картину эквипотенциальных линий электрического поля в малом цилиндре в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.



Задача 1.2 Длинный провод представляет собой сплошной цилиндр радиусом $R_2 = 0,25$ мм из металла с удельным сопротивлением $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^{-7}$ Ом·м, вплавленный в больший сплошной цилиндр радиусом $R_1 = 3,0$ мм из металла с удельным сопротивлением $\rho_1 = 8,0 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Расстояние между осями цилиндров равно $a = 2,0$ мм. По проводу течет ток $I = 1,0$ А. Относительные магнитные проницаемости веществ, из которых сделаны цилиндры $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1,26$ Гн/м.

1.2.1 Найдите индукцию магнитного поля внутри малого цилиндра.

1.2.2 Изобразите примерный вид силовых линий магнитного поля в малом цилиндре в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

Задача 1.3 При помещении вещества во внешнее электрическое поле вещество поляризуется, то есть возникают индуцированные поляризационные заряды. Поляризация вещества приводит к уменьшению напряженности электрического поля внутри диэлектрика. Это уменьшение поля характеризуется диэлектрической проницаемостью вещества ε .

В данной задаче необходимо рассчитать диэлектрическую проницаемость жидкого диэлектрика, состоящего из неполярных молекул, поляризуемость которых равна β . Концентрация молекул (число молекул в единице объема) равна n .

В жидкости молекулы расположены достаточно плотно, поэтому необходимо учитывать их

влияние друг на друга. Иными словами на каждую молекулу действует не только внешнее электрическое поле, но и поле, созданное другими молекулами. Для учета этого взаимного влияния используется модель Лоренц-Лоренца. В этой модели полагается, что отдельная молекула находится в центре сферической полости, находящейся внутри однородного диэлектрика (молекулярная структура которого не учитывается) того же вещества. Размер этой сферы не играет роли.

Итак, пусть достаточно большой объем равномерно поляризованного диэлектрика во внешнем однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}_0$.

1.3.1 Мысленно вырежем внутри этого диэлектрика сферическую полость. Полагая поляризацию диэлектрика однородной, выразите напряженность электрического поля внутри полости $\vec{E}_A$ через известную напряженность внешнего поля и модуль вектора поляризации диэлектрика

1.3.2 Получите формулу, связывающую диэлектрическую проницаемость ϵ данного диэлектрика с поляризуемостью молекулы и их концентрацией в рамках рассматриваемой модели.

Подсказки:

1. При помещении одной молекулы данного вещества в электрическое поле $\vec{E}$, в ней индуцируется дипольный момент $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$, где β — поляризуемость молекулы.
2. Поле внутри равномерно поляризованного шара равно $\vec{E}_S = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, где $\vec{P}$ — вектор *поляризации вещества (дипольный момент единицы объема)*. Поляризация связана с полем в веществе следующим соотношением $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$, где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость вещества.

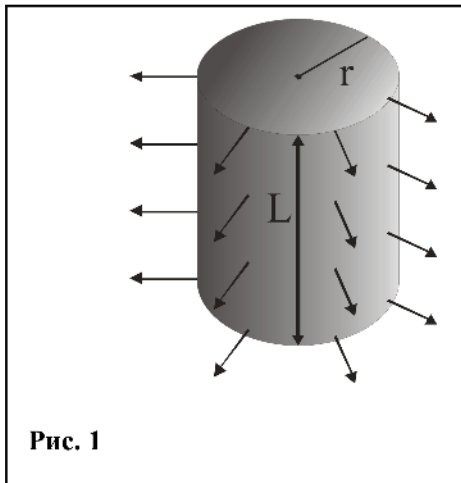
Решение

**<u>Задание 1. «Дырявая разминка»

Задача 1.1</u>**

Напряженность электрического поля внутри однородно заряженного с плотностью ρ цилиндра можно найти по теореме Гаусса.

ρ цилиндра можно найти по теореме Гаусса.



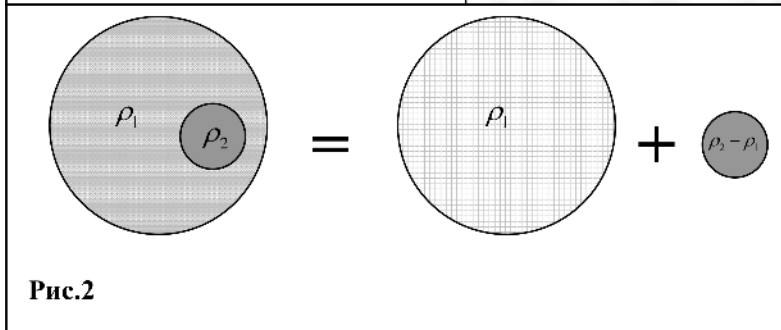
или в векторной форме

$$\vec{E} =$$

Распределение потенциала
как

$$\varphi = - \int E(r) dr$$

Поле внутри малого цилиндра



по

пр

ст

пл

ре

ρ

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0} \quad (2)$$

Распределение потенциала внутри цилиндра рассчитаем как

$$\varphi = - \int E(r) dr = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C \quad (3)$$

Поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью заряда ρ_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью заряда $\rho_2 - \rho_1$ (рис.2).

В произвольной точке А с радиус-вектором $\vec{r}_1$ относительно оси большего цилиндра и $\vec{r}_2$ относительно оси малого (рис. 3) поле равно:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_1 \vec{r}_1}{2\epsilon_0} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) \vec{r}_2}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r}_2}{2\epsilon_0} = \{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a}\} = \frac{\rho_1 \vec{a}}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r}_2}{2\epsilon_0} \quad (4)$$

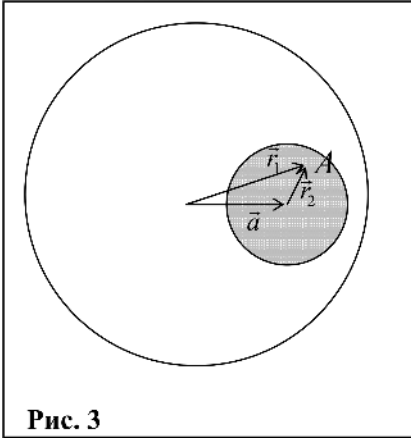


Рис. 3

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и поля, линейно зависящего от $\vec{r}_2$.

Для дальнейших рассуждений выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис. 4) и выразим в явном виде распределение потенциала внутри малого цилиндра

Распределение потенциала, соответствующее постоянному полю описывается формулой

$$\varphi_1 = -\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}ax + C_1 \quad (4)$$

а распределение потенциала, соответствующее полю, линейно зависящему от радиус-вектора

$$\varphi_2 = -\frac{\rho_2 r_2^2}{4\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho_2(x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0} + C_2 \quad (5)$$

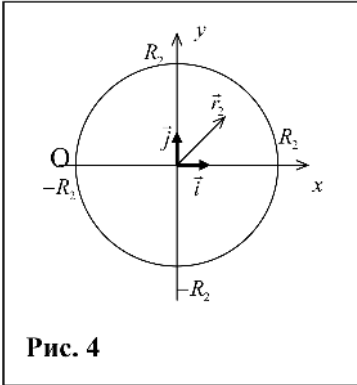


Рис. 4

Таким образом, потенциал внутри малого цилиндра описывается формулой

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\left[\frac{\rho_1 ax}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_2(x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0}\right] + C \quad (6)$$

Очевидно, линии равного потенциала в данном случае — окружности. Действительно, после очевидных математических преобразований функцию (6) можно переписать в следующем виде

$$\varphi = -\frac{\rho_2}{4\varepsilon_0} \left[\left(x + \frac{\rho_1}{\rho_2}a\right)^2 + y^2 \right] + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_0} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}a\right)^2 + C \quad (7)$$

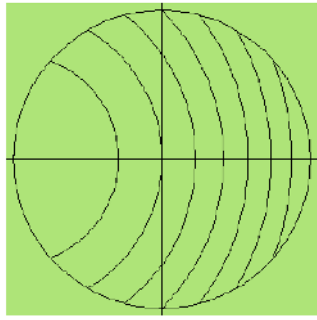


Рис. 5

откуда видно, что центр эквипотенциальных окружностей находится в точке $(-\frac{\rho_1}{\rho_2}a, 0)$, которая в нашем случае (поскольку $\frac{\rho_1}{\rho_2}a = \frac{7,08}{1,77}5,0 \text{ см} = 2,0 \text{ см} = R_2$) будет находиться в точке O (рис. 4) — на границе малого цилиндра.

Вид эквипотенциальных линий приведен на рис. 5.

Задача 1.2

Прежде всего, необходимо найти плотность тока в большом и малом цилиндрах, что сводится к решению задачи о параллельном соединении резисторов.

Токи, текущие в большом и малом цилиндрах соответственно равны

$$I_1 = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} = I \frac{\rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}}{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} + \rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}} = I \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}} \quad (1)$$

$$I_2 = I \frac{r_1}{r_1 + r_2} = I \frac{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}}{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} + \rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}} = I \frac{1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2^2}} \quad (2)$$

Плотность тока в большом и малом цилиндрах соответственно:

$$j_1 = \frac{I_1}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}} \quad (3)$$

$$j_2 = \frac{I_2}{\pi R_2^2} = \frac{I}{\pi R_2^2} \frac{1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2^2}} \quad (4)$$

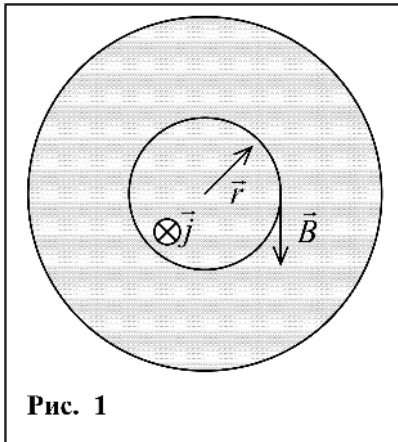


Рис. 1

Численные расчеты приводят к результатам

$$j_1 = 3,37 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2$$

$$j_2 = 2,70 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2$$

Магнитное поле внутри цилиндра, по которому течет ток с плотностью $\vec{j}$ можно найти по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

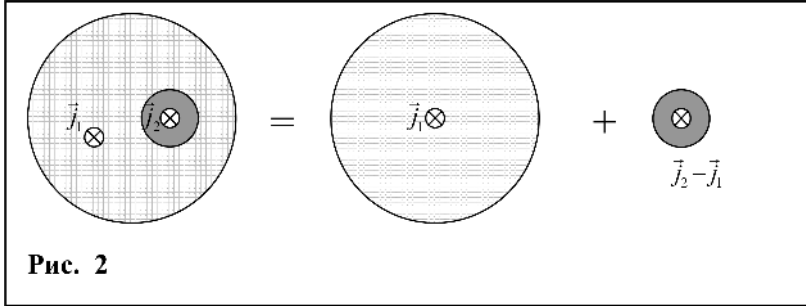
$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r \quad (5)$$

Что удобно представить в векторном виде

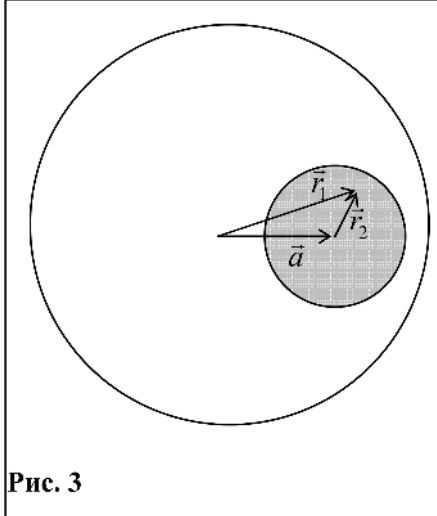
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \times \vec{r}] = \frac{\mu_0 j}{2} [\vec{n} \times \vec{r}] \quad (6)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{j}$.

Магнитное поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью протекающего тока j_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью протекающего тока $j_2 - j_1$ (рис.2).



В точке А с радиус-вектором $\vec{r}_1$ относительно оси большого цилиндра и $\vec{r}_2$ относительно оси малого



(рис.3) поле равно:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_1] + \frac{\mu_0 (j_2 - j_1)}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2] =$$

$$= \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + \frac{\mu_0 j_2}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2] = \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times \vec{a}] + \frac{\mu_0 j_2}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2]$$

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и кругового поля, модуль которого линейно зависит от $\vec{r}_2$. Выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис.6). Векторы $\vec{i}, \vec{j}$ — орты системы координат.

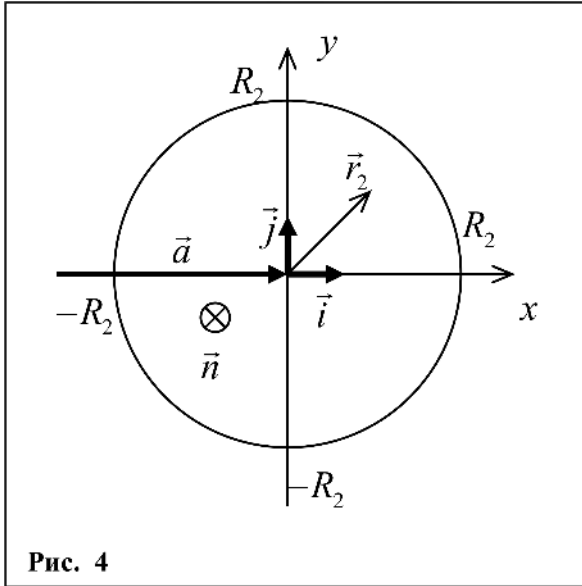


Рис. 4

Векторные произведения, фигурирующие в этих выражениях представим в явном виде

$$\vec{n} \times \vec{a} = a[\vec{n} \times \vec{i}] = -a\vec{j} \quad (8)$$

$$\vec{n} \times \vec{r}_2 = [\vec{n} \times (x\vec{i} + y\vec{j})] = y\vec{i} - x\vec{j} \quad (9)$$

Вектор индукции магнитного поля запишется в виде

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 j_1 a}{2} \vec{j} + \frac{\mu_0 j_2}{2} (y\vec{i} - x\vec{j}) = \\ &= \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0}{2} (j_1 a + j_2 x) \vec{j} \end{aligned} \quad (10)$$

При плотностях токов (3), (4) магнитное поле равно нулю в точке с координатами

$$x_0 = -\frac{j_1}{j_2} a = -\frac{3,37 \cdot 10^4}{2,70 \cdot 10^5} 2,0 \text{ мм} = -0,25 \text{ мм} = -R_2$$

$$y_0 = 0$$

Итого, магнитная индукция в малом цилиндре равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0 j_2}{2} (x + R_2) \vec{j} = \frac{\mu_0 j_2}{2} (y\vec{i} - (x + R_2) \vec{j}) \quad (11)$$

Силовые линии такого поля представляют собой окружности с центром в точке $(-R_2; 0)$.

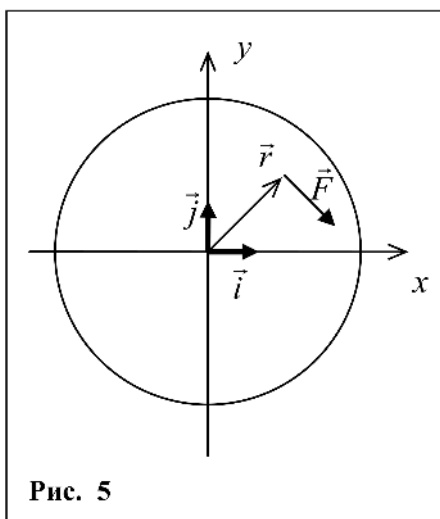


Рис. 5

Рис. 5

Дополнения.

1. Силовой линией называется такая кривая, касательная к которой в любой точке сонаправлена с полем. Очевидно, что если магнитная индукция перпендикулярна радиус-вектору в любой точке, то силовые линии такого поля – окружности (для любой точки окружности касательная перпендикулярна радиусу, проведенную в данную точку).

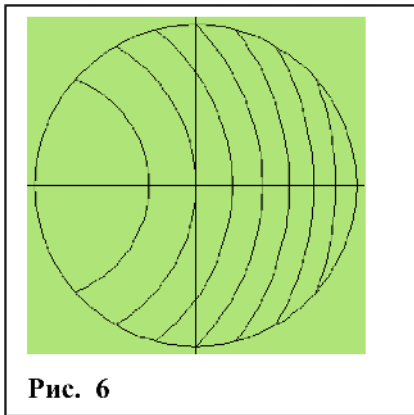


Рис. 6

Рис. 6

Как раз такая ситуация будет в нашем случае, если начало координат перенести в точку $(-R_2; 0)$. Вид силовых *линий изображен на рисунке 6.

Для более строгого доказательства рассмотрим* векторное поле $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ (рис. 5). Получим уравнение силовых линий для данного поля.

В каждой точке силовой линии поле направлено по касательной к ней. Т.е. тангенс угла наклона силовой линии к оси абсцисс равен отношению y -компоненты поля к x -компоненте поля.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \quad (12)$$

Для удобства запоминания данное соотношение лучше записать в таком виде

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} \quad (13)$$

тем более, что уравнения силовой линии в трехмерном случае выглядят аналогично:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (14)$$

(Обратите внимание, здесь два уравнения, а не одно!)
В данном случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (15)$$

$$ydy = -x dx; \quad (16)$$

$$x dx + y dy = 0; \quad (17)$$

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0; \quad (18)$$

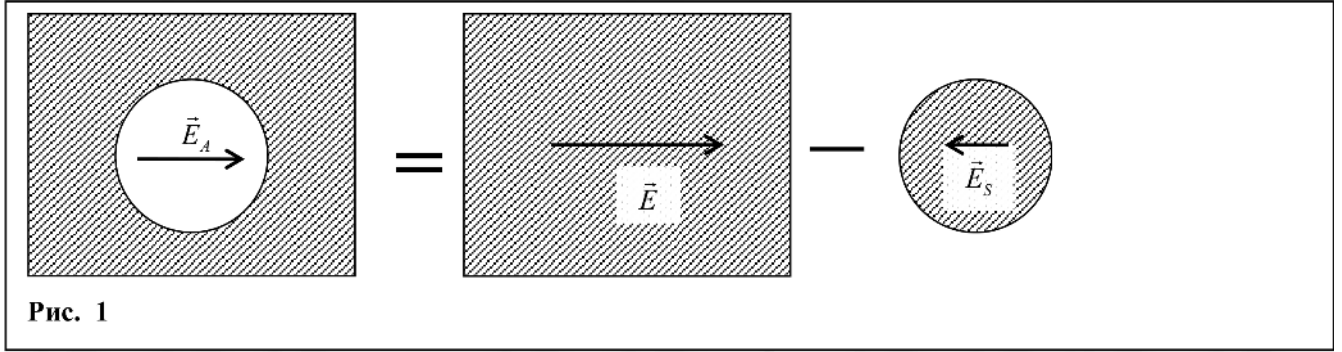
$$x^2 + y^2 = C^2 \quad (19)$$

Это и есть семейство окружностей радиуса C .

2. Обратите внимание, насколько эти две задачи похожи!

Задача 1.3

Среднее электрическое поле $\vec{E}_A$ внутри сферы найдем, как поле равномерно поляризованного диэлектрика $\vec{E}$ за вычетом поля, создаваемого равномерно поляризованным шаром $\vec{E}_S$ (рис.2).



Поле $\vec{E}_S$ направлено противоположно $\vec{E}$ — это видно из того, что

$$\vec{E}_S = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (18)$$

и $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$
то есть ($\epsilon > 1$)

$$\vec{E}_S = -\frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{3} \quad (19)$$

Интересующее нас поле

$$\vec{E}_A = \vec{E} - \vec{E}_S = \vec{E} - \left(-\frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{3}\right) = \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{3}\right) \vec{E} = \frac{\epsilon + 2}{3} \vec{E} \quad (20)$$

Именно это поле воздействует на молекулы внутри сферы в нашей модели и индуцирует в них дипольный момент

$$\vec{p} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}_A = \beta \varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3} \vec{E} \quad (21)$$

Очевидно, что поляризация (дипольный момент единицы объема вещества) равна дипольному моменту одной молекулы, умноженному на число молекул в единице объема, т.е. концентрацию молекул:

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\beta \varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3} \vec{E} \quad (22)$$

Выражения (2) и (6) дают нам следующее равенство:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = n\beta \varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3} \vec{E} \quad (23)$$

из которого определяем диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{1 + n\beta \frac{2}{3}}{1 - \frac{n\beta}{3}} = \frac{3 + 2n\beta}{3 - n\beta} = \frac{3 - n\beta + 3n\beta}{3 - n\beta} = 1 + \frac{3n\beta}{3 - n\beta} \quad (24)$$

Дополнение.

*Полученная формула, конечно, носит приближённый характер, что вытекает из принятых в задаче приближениях. Первое из них – это рассмотрение точечных диполей, что не совсем верно для веществ, состоящих из сложных молекул. Но, в любом случае, такое приближение выглядит вполне приемлемо по сравнению с выбором именно сферической полости. Заметим, что для кристаллов с кубической решёткой данное приближение выполняется точно. Т.е., действительно, поле создаваемое диполями, находящимися внутри сферы, равно нулю в центре этой сферы (без учёта поля диполя, расположенного в центре). Но точно такая же ситуация будет реализовываться если выбрать полость кубической формы. Выбор именно сферы обоснован экспериментальным подтверждением полученной формулы для большинства газообразных и жидких диэлектриков. Например, для сероуглерода формула верна как для газообразного состояния, так и для жидкого, когда концентрация молекул возрастает в 380 раз.

Подчеркнём также, что полученная формула верна только для веществ состоящих из неполярных молекул. В веществах, состоящих из полярных молекул, влияние соседних молекул существенно и приведённый выше подход оказывается верным только для очень разреженных газов.*