

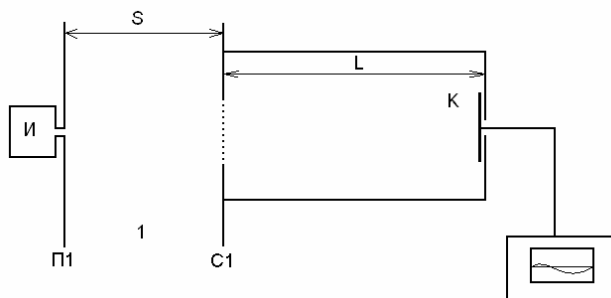
Условие

Задание¹ 2 “Масс-спектрометры”

Для определения масс ионов используют масс-спектрографы. В школьном курсе физики вы познакомились с приборами, в которых пространственное разделение ионов различных масс происходит в постоянном магнитном поле. Возможны и другие физические принципы разделения ионов. Так, в динамических масс-спектрографах селекция ионов происходит благодаря различию скоростей движения ионов в электрическом поле.

Часть 1. Постоянное поле.

Предлагаем рассмотреть простейший динамический масс-спектрометр, схема которого изображена на рисунке.



Однозарядные ионы вылетают из источника ионов **И** с пренебрежимо малой скоростью, затем попадают в область ускоряющего электрического поля **1**, ширина которой равна S . В этой области электрическое поле создается постоянным напряжением U , приложенным к пластине **П1**, расположенной непосредственно у источника, и сетке **С1**. Ускорившиеся ионы, свободно пролетают через сетку, и, пройдя эквипотенциальный промежуток длиной L , попадают на коллектор (устройство, собирающее ионы), подключенный к прибору, регистрирующему силу ионного тока в зависимости от времени. Источник и регистрирующее устройство включают в момент времени $t = 0$. Источник является импульсным, то есть ионы испускаются в течение малого промежутка времени τ , плотность потока ионов в этом временном промежутке можно считать постоянной.

1 1

1.1 Пусть источник испускает одинаковые ионы массой m . Постройте график зависимости регистрируемого ионного тока от времени.

1.2 Пусть источник испускает ионы двух типов, массы которых отличаются незначительно и равны m и $m + \delta m$, причем $\delta m \ll m$. Присутствие ионов двух типов проявляется в виде двух импульсов на графике $I(t)$. Ионы различных типов называются разрешёнными, если соответствующие им импульсы ионного тока не перекрываются во времени. Покажите, что минимальная разность масс ионов, которые разрешаются рассматриваемым прибором, удовлетворяет условию $\delta m = \alpha \sqrt{m}$.

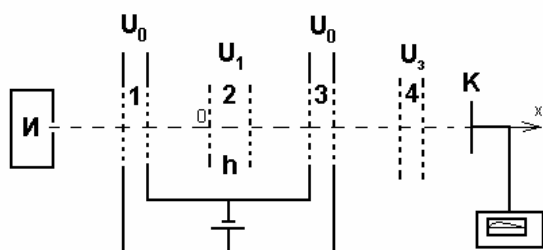
1.3 Получите формулу, связывающую коэффициент α с параметрами прибора. Рассчитайте численное значение этого коэффициента при $\tau = 1,0 \cdot 10^{-6}$ с, $S = 0,30$ м, $L = 2,0$ м, $U = 200$ В и для массы ионов, измеряемой в а.е.м. (атомных единицах массы).

1.4 Сможет ли масс-спектрометр с такими параметрами разрешить ионы $^{54}\text{Fe}^+$ и $^{56}\text{Fe}^+$?
Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹

Часть 2. Высокочастотное поле.

Рассмотренный выше масс-спектрометр обладает рядом недостатков: во-первых, достаточно большие размеры, во-вторых, высокие требования к источнику ионов. Существуют более компактные масс-спектрометры, не требующие импульсных источников ионов.

Рассмотрим, так называемый, радиочастотный масс-спектрометр, схематически изображённый на рисунке.



Источник однозарядных ионов работает непрерывно и скорость ионов на его выходе практически равна нулю. Поток ионов проходит через ряд сеток, между которыми создаются электрические поля различных типов. После их прохождения ионы собираются коллектором K , соединенным с измерителем ионного тока. К сеткам, ограничивающим промежуток 1, прикладывается постоянная разность потенциалов $U_0 = 1,0 \text{ кВ}$, создающая поле, ускоряющее ионы. Это же напряжение прикладывается к сеткам, ограничивающим промежуток 3, в котором оно создает постоянное тормозящее электрическое поле. В промежутке 2, ширина которого h , создается высокочастотное электрическое поле. К границам этого промежутка прикладывается переменное напряжение, циклическая частота которого ω может изменяться в пределах $(5 \div 15) \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Амплитудное значение этого напряжения равно $U_1 = 1,0 \text{ В}$. Наконец, к промежутку 4 прикладывается регулируемая задерживающая разность потенциалов U_3 , величина которой близка к амплитудному значению напряжения высокочастотного поля. Прибор регистрирует значение ионного тока, усредненное по промежутку времени, значительно превышающему период изменения высокочастотного поля.

Ионы, ускорившиеся в промежутке 1, попадают в область высокочастотного поля в различные моменты времени. Изменение энергии ионов в области высокочастотного поля зависит от типа ионов и момента попадания в рассматриваемую область. При некоторых условиях приращение энергии этих ионов может быть достаточным для того, чтобы преодолеть области задерживающих полей 3 и 4. Эти ионы попадут на коллектор и создадут регистрируемый ионный ток. Зависимость среднего ионного тока от частоты переменного поля в промежутке 2 может иметь ряд достаточно резких максимумов, положение которых зависит от масс исследуемых ионов. Тем самым существует возможность различать ионы различных типов. В данной части вам предлагается проанализировать работу этого прибора.

2.1 Определите скорость v_0 иона массы m после прохождения ускоряющего напряжения в промежутке 1 и максимальное ускорение a_0 этого иона в промежутке 2. Найдите численное значение v_0 для иона $^{56}\text{Fe}^+$.

2.2 Оцените по порядку величины ширину промежутка 2, при которой указанный ион, влетев в промежуток в удачный момент времени, максимально увеличит свою энергию в высокочастотном поле при его частоте $\omega = 10 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

Совместим начало отсчета оси координат Ox с началом области высокочастотного поля.

2.3 Пусть ион массы m , прошедший ускоряющий промежуток 1, попадает на левую сетку промежутка 2 в момент времени τ , при котором разность потенциалов в промежутке 2 $U = U_1 \sin \omega \tau$. Найдите зависимость ускорения, скорости и координаты иона от времени $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$, где t отсчитывается от момента попадания иона в промежуток 2.

2.4 Из-за малости U_1 , изменение скорости иона в промежутке 2 незначительно, поэтому, при расчете времени пролета этого промежутка, изменением скорости иона можно пренебречь.

Определите время t_1 пролёта этого промежутка для иона массы m , используя это приближение. Оцените относительную погрешность полученного выражения.

2.5 При заданной ширине промежутка высокочастотного поля h , изменение энергии ΔE ионов массы m , при его пролёте, зависит от частоты переменного поля ω и момента времени прихода τ . Установите зависимость изменения энергии иона в этой области от указанных величин $\Delta E(\omega, \tau)$.

Воспользуйтесь формулой: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.

2.6 Так как источник ионов работает непрерывно, то ионы попадают в область высокочастотного поля в произвольные моменты времени τ . Некоторые из них, попадающие в эту область в оптимальные моменты времени (которые, возможно зависят от частоты поля), приобретают максимальную энергию (при заданном значении частоты поля ω) $\Delta E_{\max}(\omega)$. Для анализа зависимости изменения энергии от параметров установки и типа ионов удобно представить зависимость $\Delta E_{\max}$ от безразмерного параметра $\varphi = \omega \frac{h}{v_0}$ - изменение фазы высокочастотного поля за время пролета иона. Постройте примерный график зависимости $\Delta E_{\max}$ от указанного параметра.

Полученная вами функция, скорее всего, имеет множество экстремумов в зависимости от φ , многие из которых пригодны для анализа состава потока ионов. Если частота переменного поля такова, что ионы определенной массы m , приобретают дополнительную энергию большую, чем ионы других близких масс, то, изменяя задерживающее напряжение, существует возможность выделить из всего потока ионов только ионы данной массы m . В этом случае только эти ионы будут создавать ионный ток. Ионы другой массы будут достигать коллектора при другой частоте переменного поля. Таким образом, в зависимости ионного тока от частоты поля будут наблюдаться максимумы, каждый из которых соответствует ионам определенной массы.

2.7 Укажите на графике значение параметра φ_0 , вблизи которого рассматриваемый прибор способен анализировать состав ионного потока наиболее эффективно.

Пусть источник испускает одинаковые ионы массы m . Ширина промежутка h .

2.8 Определите частоту поля ω_0 , при которой приращение энергии этих ионов будет максимально в указанной оптимальной области работы прибора. Найдите это максимальное приращение энергии $\Delta E_{\max}$ и значение времени прихода ионов τ_0 , при котором оно реализуется.

2.9 Пусть частота поля равна найденной частоте ω_0 . Чему должно быть равно максимальное значение запирающего напряжения U_{30} , при котором ионный ток становится равным нулю. Представьте это значение в виде $U_{30} = \alpha U_1$, рассчитайте численное значение коэффициента α с точностью до трех значащих цифр.

2.10 Для регистрации тока запирающее напряжение нужно немного уменьшить. Пусть $U_3 = U_{30}(1 - \eta)$, где $\eta \ll 1$. Найдите зависимость ионного тока от величины η . Сила тока, создаваемая рассматриваемыми ионами массы m , на выходе источника равна I_0 .

2.11 При заданной величине η можно регистрировать ток даже в том случае, если частота ω отличается от ω_0 на некоторую малую величину $\Delta\omega$. Найдите максимальное значение этой величины.

2.12 Пусть источник испускает ионы двух близких масс m и $m + \delta m$. При заданном η определите при каком минимальном отношении $\frac{\delta m}{m}$ эти ионы ещё могут быть разрешены.

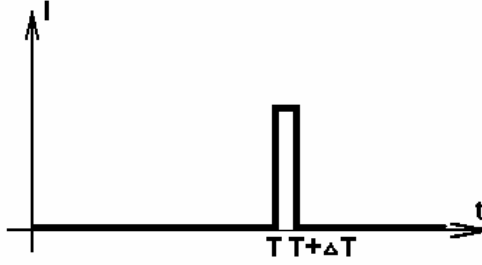
Решение

Задание 11.2 “Масс-спектрометры”

Часть 1. Постоянное поле.

1.1 Время движения иона от источника до коллектора равно

$$T = \sqrt{\frac{2S}{a}} + \frac{L}{v}, \quad (1)$$



где $a = \frac{U_e}{Sm}$ - ускорение иона в промежутке S , а $v = \sqrt{\frac{2U_e}{m}}$ - скорость, которую приобретает ион, пройдя разность потенциалов U . Подставляя, эти значения в формулу (1) получим

$$T = S\sqrt{\frac{2m}{U_e}} + L\sqrt{\frac{m}{2U_e}} \quad (2)$$

Длительность регистрации равна времени работы источника

$$\Delta T = \tau. \quad (3)$$

1.2 Предельный случай перекрывания импульсов реализуется в том случае, когда тяжёлый ион с массой $m + \delta m$ вылетает в момент $t = 0$, а лёгкий, с массой m , в момент $t = \tau$, и эти два иона одновременно достигают коллектора. Для удобства, запишем выражение для времени пролёта, полученное в пункте 1 в виде

$$T = \xi\sqrt{m}, \text{ где } \xi = S\sqrt{\frac{2}{U_e}} + L\sqrt{\frac{1}{2U_e}}. \quad (4)$$

Тогда

$$\xi\sqrt{m + \delta m} = \xi\sqrt{m} + \tau. \quad (5)$$

Считая δm малой величиной, запишем

$$\sqrt{m + \delta m} \approx \sqrt{m} \left(1 + \frac{\delta m}{2m}\right) = \sqrt{m} + \frac{\delta m}{2\sqrt{m}}. \quad (5a)$$

Тогда

$$\xi \frac{\delta m}{2\sqrt{m}} = \tau. \quad (6)$$

Откуда получаем

$$\delta m = \frac{2\tau}{\xi} \sqrt{m} = \alpha \sqrt{m}. \quad (7)$$

1.3 Рассчитаем численное значение коэффициента пропорциональности

$$\alpha = \frac{2\tau}{\xi} = \frac{2\tau}{S\sqrt{\frac{2}{U_e}} + L\sqrt{\frac{1}{2U_e}}} \quad (8)$$

$$\xi = 3,25 \cdot 10^8 \text{ с} \cdot \text{кг}^{-1/2} \quad (9)$$

$$\alpha = 6,15 \cdot 10^{-15} \text{ кг}^{1/2} \quad (10)$$

. Значение α для масс ионов, измеренных в а.е.м. равно

$$\alpha(a.e.m) = \frac{\alpha(\kappa^2)}{\sqrt{1a.e.m.}} = 0,15 \quad (11)$$

1.4 Подставляя значение $m = 56a.e.m.$, получим $\delta m = 1,12a.e.m.$, что меньше чем $2a.e.m.$. Т.е. прибор сможет разрешить эти ионы.

Часть 2.Высокочастотное поле.

2.1 Скорость иона после прохождения ускоряющего промежутка равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad (12)$$

а его максимальное ускорение

$$a_0 = \frac{eU_1}{hm} \quad (13)$$

Численное значение скорости для иона $^{56}\text{Fe}^+$ равно

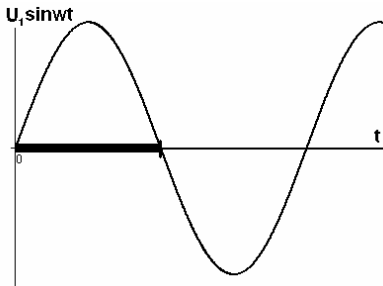
$$v_0 = 5,9 \cdot 10^4 \frac{\mathcal{M}}{c} \quad (14)$$

2.2 На первый взгляд, логично предположить, что максимальное приращение энергии ион получит, если реализуется случай изображённый на рисунке. Т.е. ион проходит промежуток ровно за половину периода колебаний поля, когда в промежуток существует ускоряющее поле.

$$\frac{h}{v_0} = \frac{\pi}{\omega} \quad (15)$$

Используя численное значение скорости, полученное в предыдущем пункте, получим

$$h \approx 2\text{см} . \quad (16)$$



2.3 Пусть ион попадает в область переменного поля в некоторый момент времени τ . Считаем величины a_0 и v_0 известными, тогда зависимость ускорения иона от времени имеет вид

$$a(t) = a_0 \sin(\omega t + \omega \tau), \quad (17)$$

его скорость изменяется по закону

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \sin(\omega t + \omega \tau) dt = v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \omega \tau), \quad (18)$$

наконец, находим зависимость координаты от времени

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \omega \tau) \right) dt = \\ &= \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau \right) t - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \omega \tau) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega \tau \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 Если пренебречь изменением скорости, то время пролета иона через область переменного поля, равна

$$t_1 = \frac{h}{v_0} \quad (20)$$

Оценим погрешность этого выражения, подставив $t_1 + \delta t_1$ в выражение для координаты $x(t)$. Получим следующее уравнение

$$h = \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau \right) (t_1 + \delta t_1) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega \tau - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_1 + \omega \tau + \omega \delta t_1). \quad (21)$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим

$$\frac{h\omega}{v_0} = \left(1 + \frac{a_0}{\omega v_0} \cos \omega \tau \right) (\omega t_1 + \omega \delta t_1) + \frac{a_0}{\omega v_0} (\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau + \omega \delta t_1)) \quad (22)$$

Величина $\frac{a_0}{\omega v_0}$ того же порядка малости, что и $\frac{\delta t_1}{t_1}$, т.к. $\frac{a_0}{\omega v_0} = \frac{a_0 t_1}{\omega v_0 t_1} \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\delta t_1}{t_1}$. Поэтому в последнем синусе можно пренебречь величиной $\omega \delta t_1$ и произведение $\frac{a_0}{\omega v_0} \cdot \omega \delta t_1$ можно пренебречь. Преобразовав, получим

$$\omega \delta t_1 = -\frac{a_0}{v_0} \left(t_1 \cos \omega \tau + \frac{1}{\omega} (\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau)) \right) \quad (23)$$

Для оценки положим, что $\cos \omega \tau = 1$ и $\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau) \approx 2$. Тогда:

$$|(\omega \delta t_1)_{\max}| = \frac{a_0}{v_0} \left(t_1 + \frac{2}{\omega} \right) \approx \frac{a_0}{v_0} t_1 \quad (24)$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta t_1}{t_1} \approx \frac{a_0}{v_0 \omega} = \frac{e U_1}{h \omega m v_0} = \left[\frac{m v_0^2}{2} = U_0 e, \quad \omega t_1 \approx \pi \right] \approx \frac{U_1}{6 U_0} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad (25)$$

Т.о. время пролёта определяется только шириной промежутка и начальной скоростью иона.

2.5 Вычислим приращение энергии иона в переменном поле

$$\Delta E = m v_0 \Delta v \quad (26)$$

Величину Δv возьмём из решения пункта 2.3, подставив вместо t , значение $t_1 = \frac{h}{v_0}$.

$$\Delta E = m v_0 \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega \tau - \cos(\omega t_1 + \omega \tau)) \quad (27)$$

Используя формулу для разности косинусов и подставляя значение t_1 , получим:

$$\Delta E(\omega, \tau) = 2 \frac{mv_0 a_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega h}{2v_0}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{2v_0} + \omega \tau\right) \quad (28)$$

2.6 Запишем выражение для ΔE , используя безразмерную величину $\varphi = \omega \frac{h}{v_0}$

$$\Delta E = ma_0 h \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} = U_1 e \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \quad (29)$$

Максимумы, в зависимости от φ будут наибольшими только для ионов попадающих в промежуток 2 в определённые моменты τ , когда

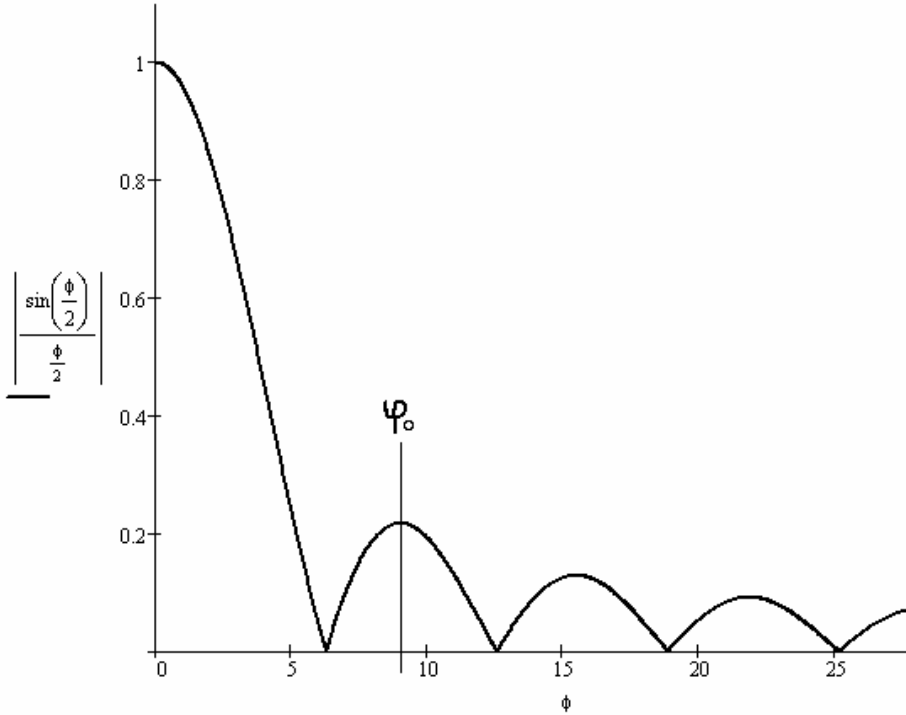
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) = \pm 1 \quad (30)$$

в зависимости от того, какой знак имеет выражение $\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$.

Поэтому более корректным является рассмотрение модуля ΔE .

$$\Delta E_{\max}(\varphi) = U_1 e \left| \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \right|. \quad (31)$$

График этой функции изображён на рисунке.



2.7 Очевидно, что самый большой максимум, $\varphi = 0$, одинаков для всех ионов. Анализировать ионный состав потока можно вблизи остальных максимумов, положение которых зависит от массы ионов ($v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$). Наиболее эффективной будет работа в области первого максимума.

2.8 Для определения частоты ω_0 , необходимо исследовать функцию вида $y = \frac{\sin(x)}{x}$.

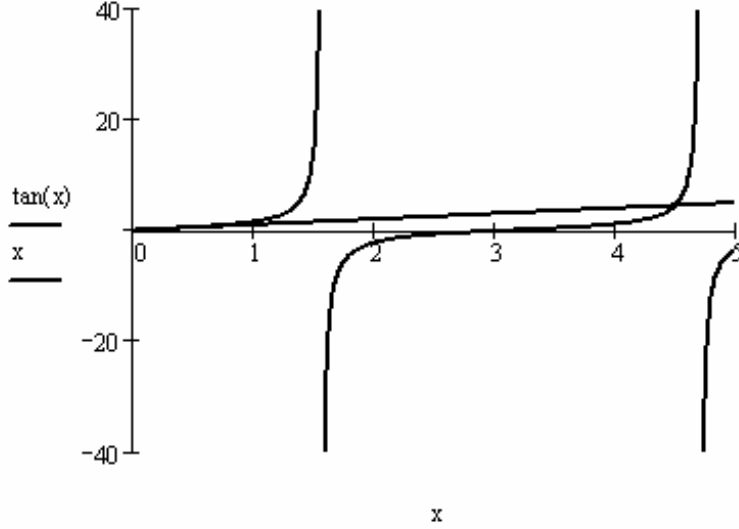
$$y'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Т.е. нужно решить уравнение $x = \text{tg}(x)$.

На рисунке видно, что решение этого уравнения $x \approx \frac{3}{2}\pi$. Большая точность пока не нужна. Таким образом

$$\varphi_0 \approx 3\pi, \quad (32)$$

$$\omega_0 \approx 3\pi \frac{h}{v_0}. \quad (33)$$



Таким образом, предположение, выдвинутое в пункте 2.2, верно лишь по порядку величины. На самом деле за время пролёта иона должно пройти три половины периода изменения высокочастотного поля.

Чтобы ΔE было максимальным $\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau\right)$ должен быть равным -1. Это значение реализуется при

$$\tau_0 \approx 0, \quad (34)$$

или, в более общем виде, $\tau_0 \approx 2\pi n$ $n \in Z$, причём, чем больше n , тем точнее.

При таких ω_0 и τ_0 максимальное приращение энергии

$$\Delta E_{\max} = eU_1 \frac{2}{3}\pi. \quad (35)$$

2.9 Точный выбор запирающего напряжения существенен для нормальной работы спектрометра. Чтобы найти α , необходимо более точно решить уравнение $x = \text{tg}(x)$. Решение можно подобрать на калькуляторе за пару минут или решить методом последовательных итераций $x_{n+1} = \arctg(x_n) + \pi$. Получим

$$x' \approx 4,493 \quad (36)$$

Тогда $\frac{\sin(x')}{x'} \approx -0,217$. Следовательно

$$\alpha = 0,217 \quad (37)$$

2.10 При уменьшении запирающего напряжения, на коллектор смогут попасть ионы для которых τ находится в некотором интервале $(\tau_0 - \Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau)$. Для этих ионов

$$\Delta E > eU_{30}(1 - \eta) \quad (38)$$

или

$$\left| U_1 \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\Delta\tau\right) \right| > \alpha U_1(1 - \eta), \text{ где } \omega\Delta\tau \ll 1 \quad (39)$$

Вблизи максимума, как было установлено ранее

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}} = -\alpha \quad (40)$$

$$\text{А } \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \cos(\omega\Delta\tau) - \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau) \quad (41)$$

В выше указанном преобразовании принято, что $\varphi_0 = 3\pi$, $\tau_0 = 0$.

Заметим, что аналогичное преобразование верно и для точных значений φ_0 и τ_0 .*

$$\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0 + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right) \cos(\omega\Delta\tau_0) + \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right) \sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau)$$

Разложив косинус в ряд, получим следующее неравенство:

$$1 - \frac{(\omega\Delta\tau)^2}{2} > 1 - \eta \quad (42)$$

$$\Delta\tau < \frac{\sqrt{2\eta}}{\omega} \quad (43)$$

Значение тока

$$I = I_0 \frac{2\Delta\tau}{2\pi/\omega} = I_0 \frac{\sqrt{2\eta}}{\pi} \quad (44)$$

2.11 В этом пункте, наоборот, $\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right) = -1$ и, предположив, что $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, необходимо решить неравенство:

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}} \right| > \alpha(1 - \eta) \quad (45)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}} \approx -\alpha \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (46)$$

Разложив косинус в ряд, получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2 < \eta \quad (47)$$

Максимальное значение

$$\Delta\varphi = 2\sqrt{2\eta} \quad (48)$$

Максимальное значение $\Delta\omega$

$$\Delta\omega = 2\sqrt{2\eta} \frac{v_0}{h} \quad (49)$$

Опять таки, выше принято, что $\varphi_0 = 3\pi$.

Но преобразования верны и для точного значения φ_0 . Предлагаем рассмотреть преобразования подробнее. Обозначим $x = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}$. Разложим $\frac{\sin(x)}{x}$ в ряд вблизи точки экстремума.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0. \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2 \cos(x)}{x^2} + \frac{2 \sin(x)}{x^3}$$

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{\sin(x)}{x}, \text{ т.к. в точке экстремума } x = \operatorname{tg}(x). \text{ Тогда } \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} = \alpha.$$

В итоге получим:

$$\frac{\sin(x)}{x} = -\alpha + \frac{\alpha}{2}(\Delta x)^2, \quad \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}} = -\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\right), \text{ что приводит к тому же ответу.}$$

2.12 Значение частоты, полученное в пункте 2.8: $\omega_0 \approx 3\pi \frac{h}{v_0}$, т.е. частота пропорциональна корню от массы ионов,

$$\omega_0 \sim \sqrt{m} \quad (50)$$

$$\sqrt{m + \delta m} \approx \sqrt{m} \left(1 + \frac{\delta m}{2m}\right) \quad (51)$$

$$\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{m + \delta m}}{\sqrt{m}} = 1 + \frac{\delta m}{2m} \quad (52)$$

Откуда получаем:

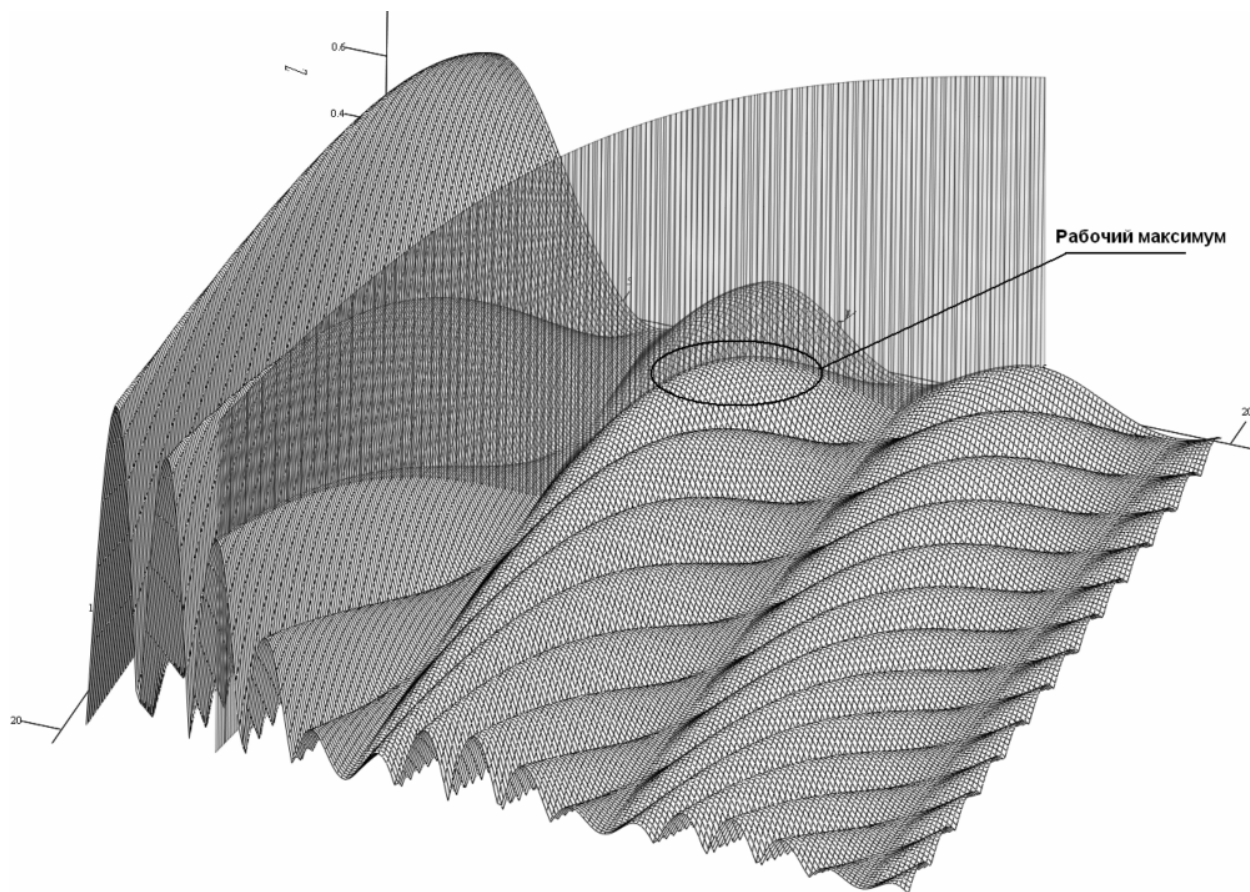
$$\frac{\delta m}{m} = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \frac{2\sqrt{2\eta}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2\eta}}{3\pi} \quad (53)$$

К примеру, для $\eta = 0,01$ $\frac{\delta m}{m} = 0,06$.

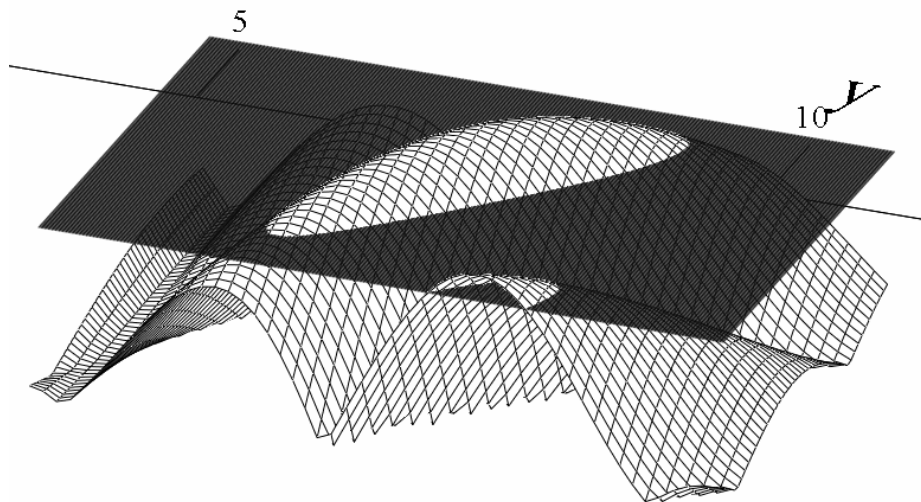
Дополнение.

В качестве дополнения к решению задачи, попытаемся изобразить трёхмерный график функции $Z(\varphi, \tau) = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$. Для наглядности положим $\omega = 0,1\varphi$.

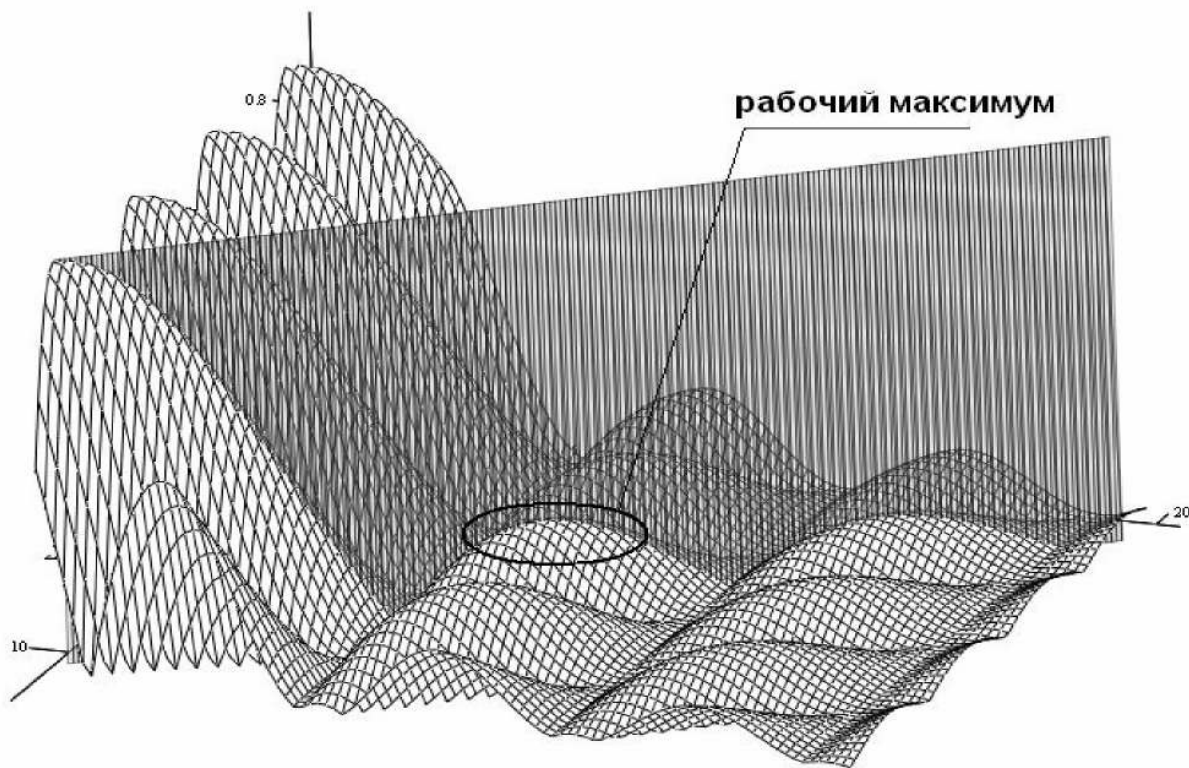
На рисунке приведён график этой зависимости, по оси OX отложены значения τ , по оси OY — значения φ . Также на графике показано сечение $\frac{\varphi}{2} + 0,1\varphi\tau = \frac{5}{2}\pi$ и выделен «рабочий максимум» для этого сечения.



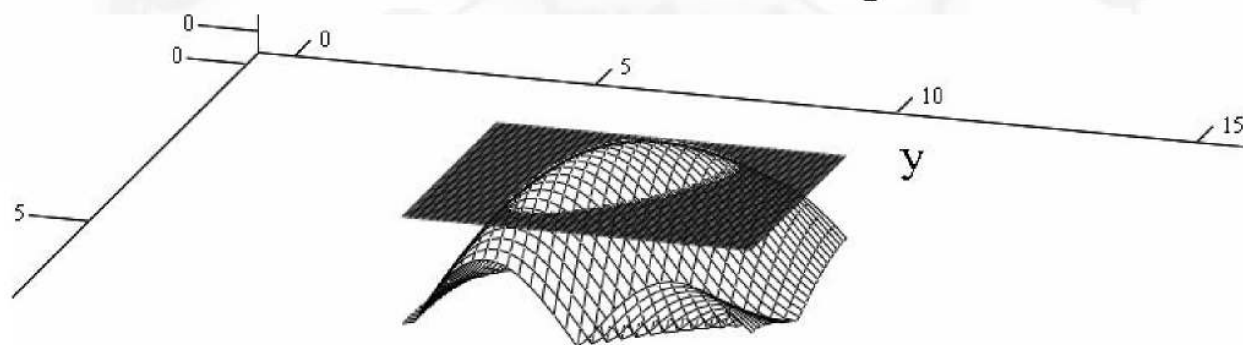
Рассмотрим более подробно область с «рабочим максимумом». Хорошо видно, что, уменьшая запирающее напряжение, мы увеличиваем ток при заданной частоте (ширина «холма» в направлении OX), и одновременно уменьшаем разрешающую способность прибора (ширина «холма» в направлении OY).



Можно немного упростить графическое изображение данной зависимости, проведя следующие рассуждения. «Время прихода» τ является независимой величиной, но мы также можем сделать независимой величиной $\omega\tau$, придав этому выражению смысл «фазы прихода» ($\varphi_0 = \omega\tau$). Изобразим график зависимости $Z(\varphi, \varphi_0) = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \varphi_0\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$.



В этом случае сечением будет являться плоскость (на графике: $\frac{\varphi}{2} + \varphi_0 = \frac{7}{2}\pi$). Приведём также увеличенный «рабочий максимум». Заметим, что, как и в первом, так и во втором случае в сечении получается уже исследованная ранее функция $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}$.



В этом случае сечением будет являться плоскость (на графике: $\frac{\varphi}{2} + \varphi_0 = \frac{7}{2}\pi$). Приведём также увеличенный «рабочий максимум». Заметим, что, как и в первом, так и во втором случае в сечении получается уже исследованная ранее функция $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}$.

$$L\sqrt{\frac{1}{2Ue}} \\ \frac{1}{2}$$

¹ Условие этой задачи такое длинное, для того, чтобы ее было легче решать.