

## Запаздывание

### Условие

#### Задание 9.2. «Запаздывание»

*Все взаимодействия, все сигналы распространяются с конечной скоростью, поэтому любая воспринимаемая нашими органами чувств и приборами информация «запаздывает»: то, что мы видим «сейчас», на самом деле произошло «раньше». Нам повезло – скорость света настолько велика, что упомянутое «запаздывание» практически не оказывает никакого влияния на наше поведение. Тем, не менее, в некоторых случаях его необходимо учитывать. Этой проблеме и посвящена данная задача.*

Положение некоторого тела (объекта наблюдения), движущегося вдоль прямой, определяется с помощью сонара (звукового радара). Сонар посылает очень короткий звуковой сигнал в виде сферической волны и улавливает отраженную от тела волну. Скорость распространения волны известна и равна  $c$ . Сонар фиксирует время, когда послан сигнал –  $t_0$  и время прихода отраженной волны –  $\tau$ . Будем считать, что сигналы сонара каким-то образом различаются, поэтому компьютер сонара в момент регистрации отраженного сигнала точно «знает», когда именно этот сигнал был послан. Затуханием сигнала можно пренебречь. Введем ось координат  $Ox$ , начало которой совместим с сонаром. Будем рассматривать тела, движущиеся вдоль этой прямой. Размеры сонара и объекта достаточно малы, поэтому возможно, что объект проходит в непосредственной близости от сонара. Считайте, что время наблюдения изменяется от минус до плюс бесконечности. Для определения положения тела приняты следующие правила: положение тела в момент прихода отраженного сигнала задается регистрируемым направлением на объект наблюдения, а расстояние до него рассчитывается по формуле

$$r' = c \frac{\tau - t_0}{2}. \quad (1)$$

Определенное по этим правилам положение тела будем называть *изображением* объекта.

**2.1.** Пусть наблюдаемое тело движется равномерно вдоль оси  $Ox$ . Закон движения тела имеет вид

$$x = x_0 + v_0 t. \quad (2)$$

**2.1.1** Определите скорость движения изображения тела. **2.1.2** Найдите закон движения изображения. Постройте графики законов движения объекта и его изображения.

*Рассмотрите различные варианты начального положения и направления движения тела. Отдельно рассмотрите случай, когда скорость движения объекта будет больше скорости звука. А может изображений будет несколько?*

**2.2** Наблюдаемое тело движется равноускоренно вдоль оси  $Ox$ . Закон движения тела имеет вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

**2.2.1** Найдите закон движения изображения. Постройте схематические графики законов движения объекта и его изображения.

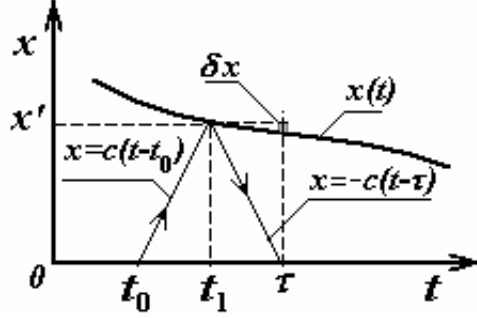
### Решение

#### Задание 9.2. «Запаздывание»

Сначала рассмотрим общие подходы к решению данной задачи. Схематически изобразим (рис. 1) закон движения тела  $x(t)$ . Сигнал, посланный в момент времени  $t_0$  распространяется

по закону  $x_c = c(t - t_0)$ . Когда сигнал достигнет движущегося тела, их координаты будут равны, поэтому момент времени отражения сигнала  $t_1$ , может быть найдено из уравнения

$$x(t_1) = c(t_1 - t_0). \quad (1)$$



Это уравнение позволяет найти момент времени отражения  $t_1$  как функцию времени испускания сигнала  $t_0$ . Отраженный сигнал движется в обратном направлении с той же скоростью, поэтому он вернется в исходную точку в момент времени  $\tau$ , для которого выполняется соотношение

$$t_1 - t_0 = \tau - t_1. \quad (2)$$

Согласно описанной в условии методике, за положение объекта в момент прихода сигнала принимается его положение в момент отражения сигнала. На рисунке отмечена ошибка определения закона движения  $\delta x$ , связанная с тем, что координата движущегося тела в момент отражения сигнала, приписывается изображению в момент прихода отраженного сигнала. \*Итак, в принципе, первый путь решения задачи проясняется: из уравнения (1) находим  $t_1$  как функцию  $t_0$ ; вычисляем координату  $x(t_1(t_0))$ , затем из уравнения (2)  $t_1(t_0) - t_0 = \tau - t_1(t_0)$  выражаем  $t_0$  как функцию  $\tau$ ; наконец записываем закон движения<sup>1</sup> изображения  $x'(\tau) = x(t_1(t_0(\tau)))$ .\* Однако на этом пути придется решать два уравнения (1) и (2), при этом необходимо находить промежуточную функцию  $t_1(t_0)$ , которая не нужна в окончательном результате. Поэтому можно элементарно избавиться от этой функции, переписав уравнение (1) с помощью соотношения (2)

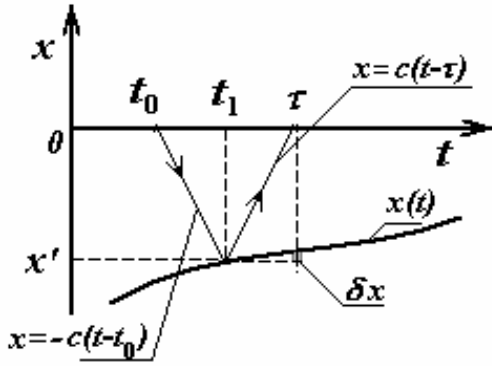
$$x(t_1) = c(\tau - t_1). \quad (3)$$

Из этого уравнения можно найти время отражения как функцию времени приема отраженного сигнала  $t_1(\tau)$ , а закон движения изображения далее можно определить двумя способами

$$x'(\tau) = x(t_1(\tau)), \quad (4)$$

либо

$$x'(\tau) = c(\tau - t_1(\tau)). \quad (5)$$



Этот путь явно короче: решение одного уравнения и одна подстановка. Теперь еще одно дополнительное осложнение – а если координата объекта отрицательна? Сделаем рисунок для этого варианта (рис. 2) Тогда следует рассматривать сигнал, распространяющийся в отрицательном направлении оси  $Ox$ , в этом случае уравнение (1) надо заменить на

$$x(t_1) = -c(t_0 - t_1), \quad (1^*)$$

соответственно изменится и более удобное уравнение

1 1

(3)

$$x(t_1) = -c(\tau - t_1). \quad (3^*)$$

Уравнения (3) и (3\*) отличаются только знаком правой части, поэтому их можно объединить

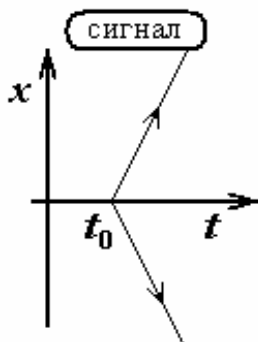
$$x(t_1) = \pm c(\tau - t_1) \quad (6)$$

или переписать в виде, который отражает явный физический смысл (расстояние до объекта равно расстоянию, которое проходит сигнал):

$$|x(t_1)| = c(\tau - t_1). \quad (7)$$

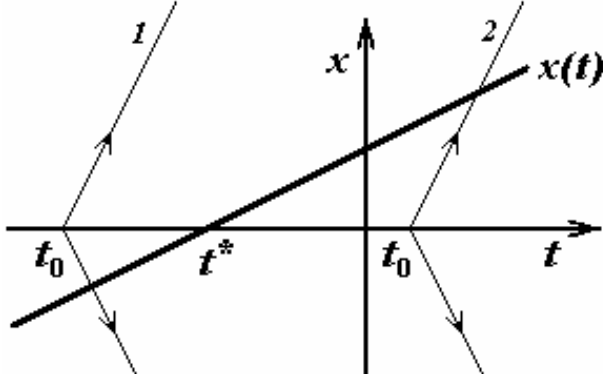
Кстати, при любом движении (не только вдоль оси  $Ox$ ) – справедливо такое уравнение! Замечательно, но уравнение (7) или равносильное ему (6) может иметь несколько корней. Конечно, исходя из постановки задачи<sup>2</sup>, следует выбирать только те корни, для которых выполняется условие

$$t_0 < t_1 < \tau. \quad (8)$$



Каждый раз придется анализировать корни – искать их смысл, принимать, или отбрасывать. По-видимому, все же сначала лучше анализировать, а потом искать то, что нужно. Такой анализ можно унифицировать: построить график закон движения и график распространения сигнала (рис.3), а затем рассмотреть точки их пересечения. При этом следует посмотреть, как меняется «картинка» при изменении параметров задачи. Применим эти общие рассуждения к тем вариантам движения объекта, которые описаны в условии задачи.

### 1. Равномерное движение.



Построим график закона движения тела

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad (1.1)$$

который является прямой линией (рис. 4) Также изобразим графики движения сигналов, испущенных в различные моменты времени. Легко заметить, что необходимо решать различные уравнения, в зависимости от знака координаты объекта в момент отражения сигнала. Эти два варианта легко различимы. Объект пересекает начало координат<sup>3</sup> в момент времени

$$t^* = -\frac{x_0}{v_0}; \quad (1.2)$$

Если сигнал послан в этот момент времени, то отражение и возвращение произойдут мгновенно, то есть при  $t_0 = t^* \tau = t_1 = t_0 = t^*$ . Итак, при  $\tau = t_1 = t_0 < -\frac{x_0}{v_0}$ , для определения закона движения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1 = -c(\tau - t_1), \quad (1.3)$$

<sup>2</sup> Сигнал распространяется во все стороны пространства, но только «из прошлого в будущее».

<sup>3</sup> В реальности, такая ситуация не очень приятна, как для объекта, так и для наблюдателя. Но в рамках нашей модели материальных точек, будем считать, что наши «герои» успешно разойдутся. Более правдоподобная ситуация будет рассмотрена чуть позже.

из которого следует, что  $t_1 = \frac{c\tau + x_0}{c - v_0}$ , а закон движения имеет вид

$$x'(\tau) = -c(\tau - t_1) = \frac{c}{c - v_0}(x_0 + v_0 \tau). \quad (1.4)$$

При  $\tau = t_1 = t_0 > -\frac{x_0}{v_0}$  уравнение, для определения времени отражения, имеет вид

$$x_0 + v_0 t_1 = c(\tau - t_1), \quad (1.5)$$

из которого определяем  $t_1 = \frac{c\tau - x_0}{c + v_0}$  и закон движения изображения

$$x'(\tau) = c(\tau - t_1) = \frac{c}{c + v_0}(x_0 + v_0 \tau). \quad (1.6)$$

Итак, закон движения изображения в рассматриваемом случае имеет вид

$$x'(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma}(x_0 + v_0\tau), & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0}, \\ \frac{1}{1+\gamma}(x_0 + v_0\tau), & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}, \end{cases} \quad (1.7)$$

здесь обозначено  $\gamma = \frac{v_0}{c}$  (это обозначение мы будем использовать и в дальнейшем).

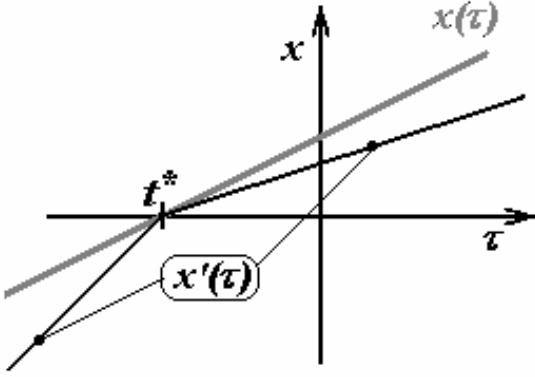
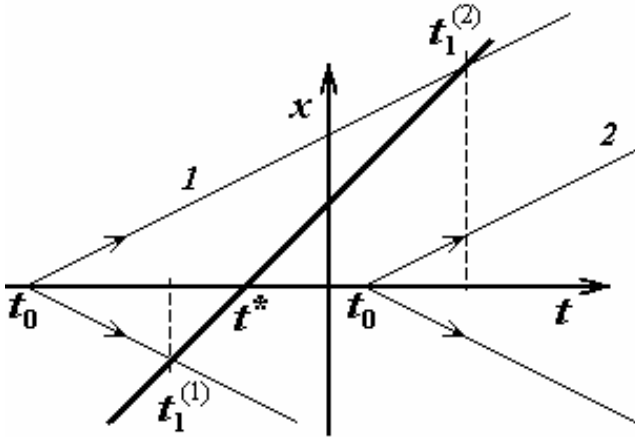


График этой функции показан на рисунке 5, там же изображен и график движения самого объекта. Скорость движения изображения изменяется скачком при переходе объекта через начало координат: при приближении объекта его изображение движется быстрее, при удалении наоборот – изображение движется медленнее:

$$v'(\tau) = \begin{cases} \frac{v_0}{1-\gamma}, & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0} \\ \frac{v_0}{1+\gamma}, & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0} \end{cases}. \quad (1.8)$$

Попытайтесь качественно объяснить этот эффект изменения скорости.



На этом решение данной части задачи не заканчивается – необходимо отдельно рассмотреть движение объекта со скоростью, большей скорости сигнала  $v_0 > c$ . Опять построим графики законов движения объекта и сигналов, посланных в различные моменты времени (рис. 6 – на котором ради экономии места масштаб оси времени изменен по сравнению с предыдущими рисунками). В этом случае ситуация кардинально изменяется. Во-первых, сигналы, посланные в моменты времени  $t_0 > t^*$  не догонят объект, следовательно, не дают изображения (оно исчезает!).

Во-вторых, сигналы, посланные при  $t_0 < t^*$ , отразятся от объекта дважды: один раз при приближении самолета (в момент времени  $t_1^{(1)}$ ) и при его удалении (в момент времени  $t_1^{(2)}$ ).

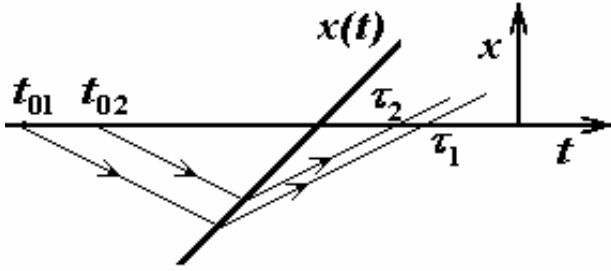
Второе отражение произойдет, когда объект догонит сигнал. Таким образом, при  $\tau > t^*$  сонар<sup>4</sup> будет давать два изображения. Для расчета закона движения первого изображения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1^{(1)} = -c(\tau - t_1^{(1)}), \quad (1.9)$$

которое совпадает с уравнением (1.3), и поэтому приводит к тому же закону движения (напомним, справедливому только при  $\tau > t^*$ )

$$x'_{(1)}(\tau) = \frac{c}{c - v_0}(x_0 + v_0 \tau). \quad (1.10)$$

Поразительно, так как  $v_0 > c$ , скорость изображения отрицательна – изображение движется в сторону противоположную движению объекта. Объяснение этого парадокса дано на рисунке 7. Сигнал, посланный раньше ( $t_{01} < t_{02}$ ), возвратится позже ( $\tau_1 > \tau_2$ ), поэтому быстрее будет поступать информация о более близком положении объекта.



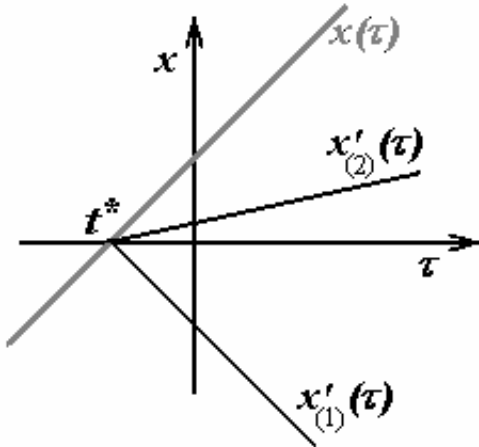
Для описания движения второго изображения необходимо решить уравнение, совпадающее с уравнением (1.5),

$$x_0 + v_0 t_1^{(2)} = c(\tau - t_1^{(2)}), \quad (1.11)$$

что приводит к аналогичному закону движения изображения

$$x'_{(2)}(\tau) = \frac{c}{c + v_0}(x_0 + v_0 \tau). \quad (1.12)$$

Графики этих законов движения построены на рисунке 8.



Скорости движения изображений легко найти из законов движения

$$v'_{(1)} = \frac{v_0}{1 - \gamma}, \quad \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}$$

$$v'_{(2)} = \frac{v_0}{1 + \gamma}, \quad \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0} \quad (1.13)$$

Таким образом, изображения появляются в момент пересечения объектом начала координат, затем одно медленно удаляется в ту же сторону, что и движущийся объект, а второе – движется быстрее в противоположную сторону.

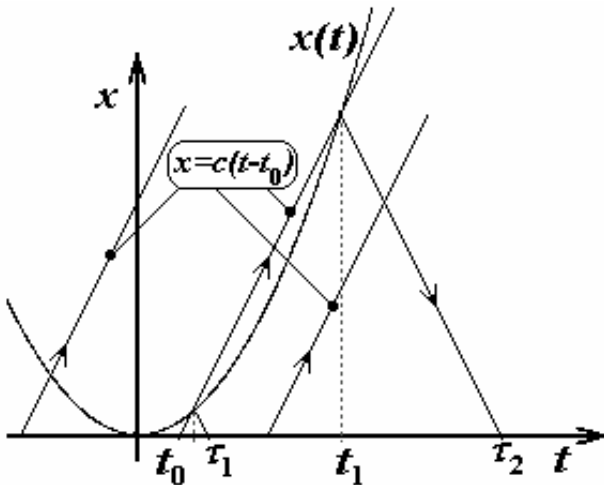
4 4

## 2. Равноускоренное движение.

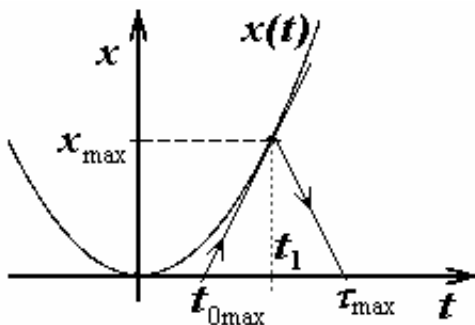
Если при равномерном движении пришлось рассматривать четыре варианта, то сколько их будет при равноускоренном движении объекта? При законе движения

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \quad (2.1)$$

объект все время находится с одной стороны от наблюдателя ( $x \geq 0$ ), поэтому достаточно рассмотреть только сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси  $Ox$ . Также обратим внимание, что скорость объекта изменяется и на одних интервалах больше скорости сигнала, а на других меньше.



Графический анализ взаимного расположения графика движения объекта (парабола) и сигналов (лучей прямых) показывает (рис. 9), что от одного сигнала, испущенного в момент  $t_0$ , может быть зарегистрировано два отражения  $\tau_1, \tau_2$  – один раз сигнал догоняет объект, второй раз объект догоняет сигнал. Возможна также ситуация, когда отраженных сигналов не будет – сигнал не может догнать объект, разогнавшийся до скорости большей скорости сигнала. Граничным между этими случаями, является вариант, при котором график распространения сигнала является касательным к параболе – графику закона движения объекта (рис. 10).



Легко понять, что в этом случае в момент отражения скорость объекта  $v = at$  сравнивается со скоростью сигнала. Это позволяет найти этот момент (последней возможности догнать объект), используя уравнение  $at_{1\max} = c$ . Из которого следует

$$t_{1\max} = \frac{c}{a}. \quad (2.2)$$

В этот момент находится в точке с координатой

$$x_{\max} = \frac{a(t_{1\max})^2}{2} = \frac{c^2}{2a}. \quad (2.3)$$

Максимальный момент отправления сигнала, который может догнать объект, определяется формулой

$$t_{0\max} = t_{1\max} - \frac{x_{\max}}{c} = \frac{c}{2a}, \quad (2.4)$$

а соответствующий момент возвращения «последнего» сигнала

$$\tau_{\max} = t_{1\max} + \frac{x_{\max}}{c} = \frac{3c}{2a}, \quad (2.5)$$

На первый взгляд, кажется, что решение задачи опять надо разбивать на различные этапы, но ведь мы разработали другой метод решения, основанный на «привязке» к моменту регистрации, а не к моменту «запуска». Поэтому рассмотрим графическую иллюстрацию уравнения (3), включающего законы движения объекта и отраженного сигнала. Этот метод позволяет решить задачу единообразно для любого момента времени регистрации. Для графического анализа этого уравнения необходимо «зеркально» отразить рисунок 1.9, в результате получим рисунок 11. Здесь также есть значения моментов регистрации  $\tau$ , которым соответствуют два момента отражения, следовательно, и два изображения; есть значение  $\tau_{\min}$  - минимальное время прихода отраженных сигналов (независимо от времени их отправления). Это время находится аналогично (2.5)

$$\tau_{\min} = -\frac{c^2}{2a} + \frac{c}{a} = -\frac{c}{2a}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при  $\tau > \tau_{\min}$  общее уравнение (3), имеющее вид

$$\frac{at_1^2}{2} = c(\tau - t_1), \quad (2.7)$$

имеет два корня

$$t_1(\tau) = -\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}. \quad (2.8)$$

Соответствующие этим решениям законы движения изображений имеют вид

$$x'_{(1,2)} = c(\tau - t_1) = c\left(\tau + \frac{c}{a} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right) = \frac{c}{a}\left(a\tau + c\left(1 \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right)\right). \quad (2.9)$$

Проанализируйте эти функции самостоятельно, их графики показаны на рисунке 1.12.

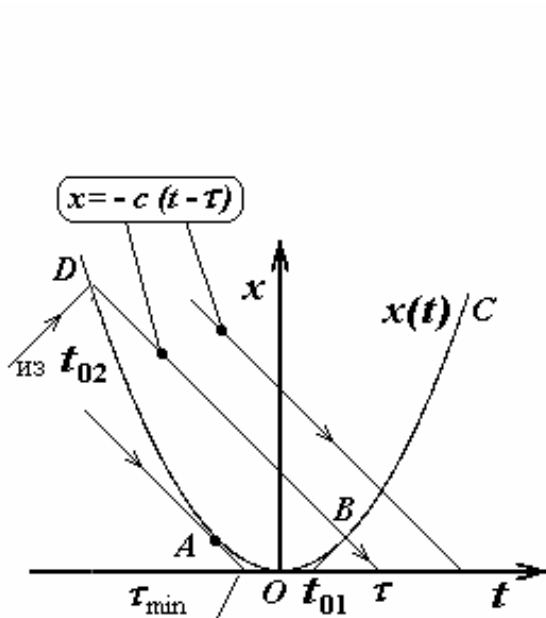


Рис. 1.11

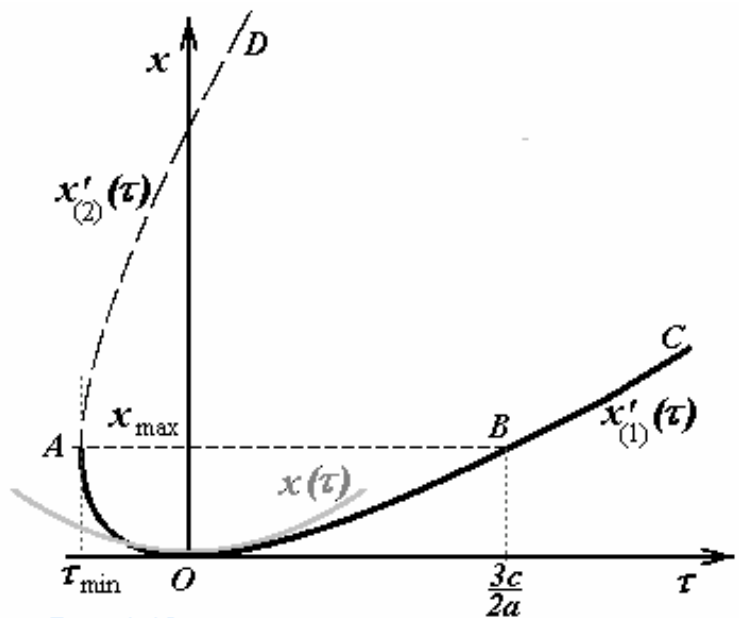


Рис. 1.12

Рассмотрите также физический смысл всех ветвей, соотнесите их с результатами проведенного качественного анализа. Для подсказки эти ветви обозначены на рис. 1.11 и 1.12 одинаково. А по существу, на них изображена одна и та же парабола, только повернутая и немного деформированная.

<sup>1</sup> Все кинематические характеристики движения изображений будем «штриховать»

<sup>2</sup> Сигнал распространяется во все стороны пространства, но только «из прошлого в будущее».

<sup>3</sup> В реальности, такая ситуация не очень приятна, как для объекта, так и для наблюдателя. Но в рамках нашей модели материальных точек, будем считать, что наши «герои» успешно разойдутся. Более правдоподобная ситуация будет рассмотрена чуть позже.

<sup>4</sup> Не будем обсуждать, можно ли реально зарегистрировать оба отраженных сигнала – в нашем рассмотрении затуханием сигнала пренебрегаем.