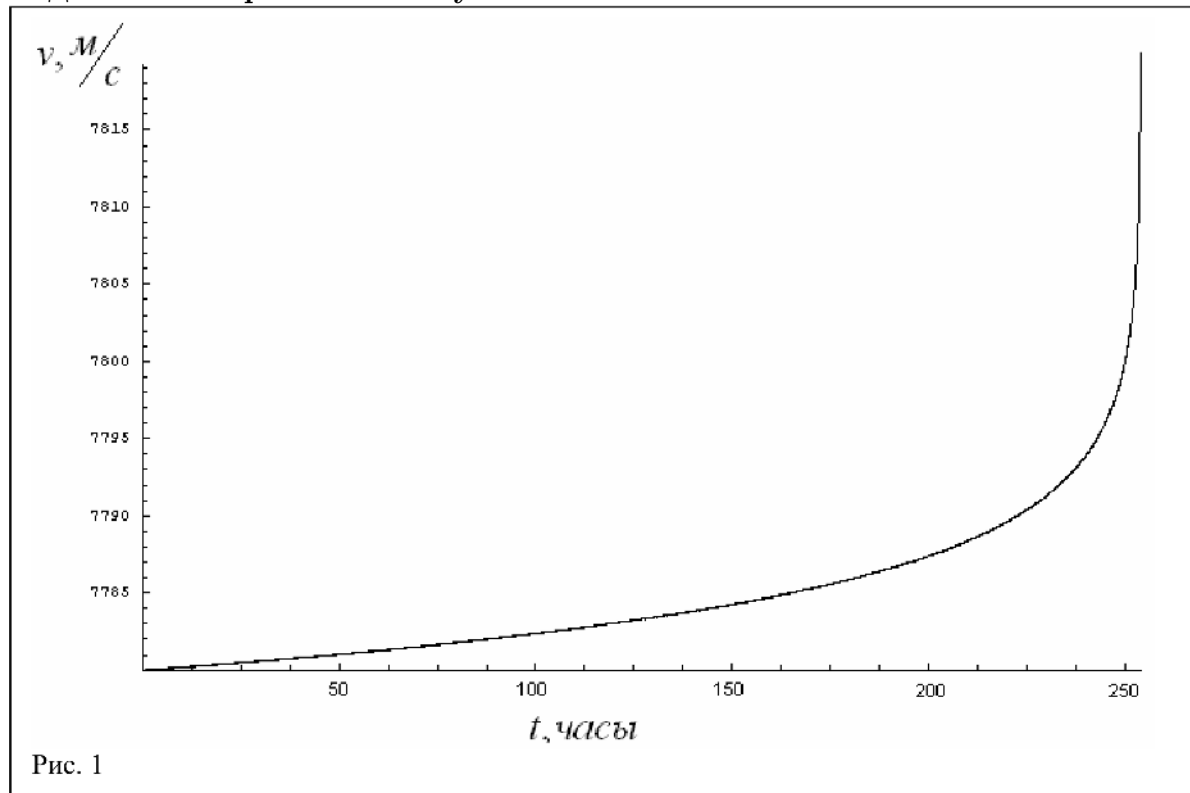


Торможение спутника

Условие

Задание 2 «Торможение спутника»



Рассмотрим движение искусственного спутника Земли в верхних слоях атмосферы. Наличие атмосферного «хвоста» приводит к тому, что на спутник действует тормозящая сила, пропорциональная плотности газа, площади поперечного сечения спутника и квадрату его скорости:

$$F_C = C \cdot \rho \cdot S \cdot v^2.$$

Безразмерный коэффициент C в данной задаче можно принять равным единице.

Сила эта невелика, и спутник может годами вращаться вокруг Земли. Однако радиус его орбиты будет постепенно уменьшаться, соответственно будет изменяться и скорость движения спутника. Предлагаем рассмотреть динамику спутника подробнее:

1. Спутник с массой m и площадью поперечного сечения S находится на орбите радиуса R_0 . Определите скорость его движения v_0 и период обращения вокруг Земли T_0 . 2. Чему равна полная механическая энергия спутника E_0 ? 3. Теперь учтём силу сопротивления. Плотность атмосферы на данной высоте — ρ_0 . За один «виток» радиус орбиты изменяется на относительно маленькую величину ΔR ($\Delta R \ll R_0$), поэтому силу сопротивления на этом «витке» можно считать постоянной величиной. Определите относительное изменение скорости спутника $\frac{\Delta v}{v_0}$ и радиуса орбиты $\frac{\Delta R}{R_0}$ за один оборот. 4. Определите тангенциальное a_τ (по касательной к орбите) ускорение спутника на этой орбите. 5. С какой скоростью v_{n0} спутник приближается к центру Земли на этой высоте? Если бы плотность атмосферы изменялась по закону $\rho = AR^\alpha$, то при некотором значении α , эта скорость оставалась бы постоянной величиной. Определите, чему равен этот показатель α .

6. Рассмотренное явление может дать ценную информацию о верхних слоях атмосферы. Сферический зонд с массой $m = 100$ кг и площадью поперечного сечения $S = 1,00$ м² выводят

на орбиту на высоте $h = 208$ км. Не составляет большого труда измерять изменение скорости спутника. На рисунке 1 приведён график зависимости скорости спутника от времени наблюдения.

Известно, что плотность атмосферы экспоненциально уменьшается с высотой, т.е. $\rho \sim e^{-\beta h}$. Используя приведенный график, определите постоянную β .

Некоторые постоянные:

Радиус Земли $R_3 = 6,40 \cdot 10^6$ м.

Масса Земли $M = 6,00 \cdot 10^{24}$ кг.

Решение

Задание 2 «Торможение спутника»

1. При движении спутника, на него действует лишь сила притяжения со стороны Земли (сопротивление пока не учитываем). Она же является центростремительной силой.

$$G \frac{Mm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \quad (1)$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \quad (2)$$

Период обращения:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_0^{3/2} \quad (3)$$

2. Полная механическая энергия спутника есть сумма его потенциальной и кинетической энергий:

$$E_0 = -G \frac{Mm}{R_0} + \frac{mv_0^2}{2} = -G \frac{Mm}{2R_0} = -\frac{mv_0^2}{2} \quad (4)$$

Заметим, что полная энергия является отрицательной величиной и по модулю равна кинетической энергии.

3. Т.к. радиус орбиты изменяется несущественно, то можно считать, что на протяжении всего витка на него действует одна и та же постоянная по модулю сила сопротивления $F_C = C\rho_0 S v_0^2$, т.е. плотность воздуха и скорость в этом выражении считаем постоянными. Эта сила будет совершать отрицательную работу $A_C = -F_C \cdot 2\pi R_0$, что приведёт к уменьшению полной энергии спутника. Для вычисления относительного изменения скорости, воспользуемся выражением полной энергии спутника через его скорость. Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} - C\rho_0 S v_0^2 \cdot 2\pi R_0 = -\frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} \quad (5)$$

Сразу же отметим, что скорость должна увеличиваться. Преобразуем выражения, стоящие в правой части равенства.

$$(v_0 + \Delta v)^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \approx v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0}\right) \quad (6)$$

В последнем преобразовании было учтено, что величина $\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2$ очень маленькая, поэтому её можно не учитывать. Используя такое упрощение и преобразуя уравнение (5), получим:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 2\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (7)$$

Для определения относительного изменения радиуса орбиты, поступим следующим образом. Из (2) следует, что:

$$v_0^2 R_0 = GM = \text{const} \quad (8)$$

Другими словами, произведения квадрата скорости на радиус орбиты остаётся постоянной величиной. Значит:

$$(v_0 + \Delta v)^2 \cdot (R_0 - \Delta R) = v_0^2 R_0 \quad (9)$$

Совершив, преобразование (6), получим:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2 \frac{\Delta v}{v_0} = 4\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (10)$$

Заметим, что в решении этого пункта присутствует существенное упрощение. С одной стороны мы считаем силу постоянной, а, т.к. в выражение для силы входит квадрат скорости, то его мы фактически тоже считаем постоянным. С другой стороны мы ищем изменение этой самой скорости. На самом деле, с изменением скорости изменяется и сила сопротивления, и точное решение будет несколько отличаться от полученного нами. Однако для малых относительных изменений скорости это различие будет несущественным и такой метод решения вполне применим.

4. Выражение для тангенциального ускорения легко получить, разделив изменение скорости спутника на величину промежутка времени, за который это изменение произошло, т.е. на продолжительность одного «витка».

$$a_T = \Delta v / (2\pi R_0 / v_0) = \frac{C\rho_0 S v_0^2}{m} = \frac{F_C}{m} \quad (11)$$

Такой вот получается парадокс. Вроде как сила сопротивления, а приводит к ускорению спутника.

5. Скорость снижения спутника находится аналогично:

$$v_{n0} = \Delta R / (2\pi R_0 / v_0) = \frac{2R_0 C\rho_0 S v_0}{m} \quad (12)$$

Используя выражение (2), получим:

$$v_{n0} = \frac{2C\rho_0 S \sqrt{GM}}{m} \sqrt{R_0} \quad (13)$$

Если плотность будет убывать обратно пропорционально корню квадратному от расстояния до центра Земли, то скорость v_{n0} не будет изменяться. Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

6. Рассмотрим подробнее выражение (11). Выражая плотность, получим:

$$\rho = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} a_T = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (15)$$

Таким образом, чтобы найти плотность, надо не знать скорость и ускорение спутника. Кроме того, понадобится также определять высоту, на которой находится спутник в данный момент времени:

$$h = R - R_0 = \frac{GM}{v^2} - R_0 \quad (16)$$

Подставим известные численные значения постоянных и получим:

$$\rho = 100 \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (17)$$

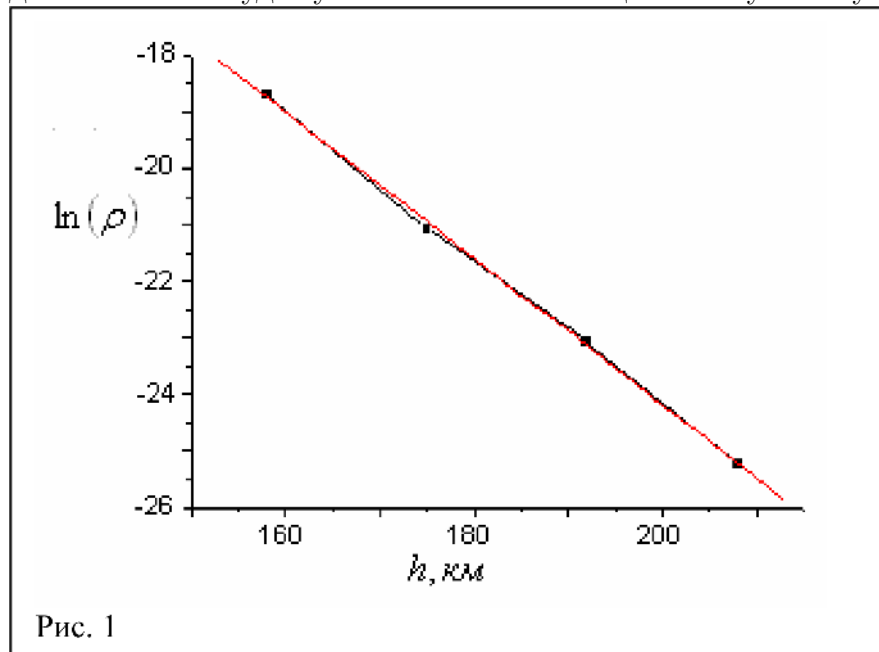
$$h = \frac{4,00 \cdot 10^{14}}{v^2} - 6,4 \cdot 10^6 \quad (18)$$

Для вычисления $\rho(h)$ необходимо на приведённом графике взять несколько точек, по значению скорости вычислить высоту полёта спутника, а проведя касательные в этих точках, вычислить ускорения, что позволит определить плотность атмосферы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$v, \frac{м}{с}$	$h, км$	$\frac{\Delta v}{\Delta t}, \frac{м}{с^2}$	$\rho, \frac{кг}{м^3}$	$\ln(\rho)$
7780	208	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-11}$	-25
7790	192	$5,6 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-11}$	-23
7800	175	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-10}$	-21
7810	158	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-9}$	-19

Точно провести касательную – сложная задача, поэтому ускорение приведено с двумя (а в последнем случае – с одной) значащими цифрами. Видим, что в пятидесятикилометровом интервале высоты плотность изменяется почти на три порядка. В таблице также вычислен натуральный логарифм от плотности, что необходимо для определения β . На рисунке 1 приведён график $\ln(\rho) = f(h)$. Можно с достаточной долей уверенности сказать, что плотность действительно будет убывать по экспоненциальному закону.



Из этого графика можно получить величину постоянной β :

$$\beta = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-1} \text{ km}^{-1} = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ M}^{-1}. \quad (19)$$