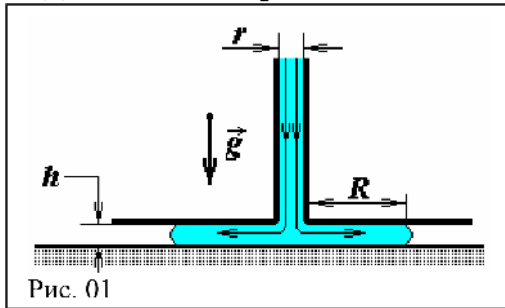


## Вверх – вниз

### Условие

#### Задание 2 «Вверх – вниз»



**2.1** Плоский диск большого радиуса жестко закреплен на расстоянии  $h = 5,0$  мм от гладкой горизонтальной поверхности (рис. 01). В центре диска расположено отверстие, в которое вставлена вертикальная труба радиуса  $r = 3,0$  мм, по которой в пространство между диском и плоскостью подается идеальная (несжимаемая и невязкая) жидкость, которая в дальнейшем растекается в зазоре между диском и плоскостью, полностью заполняя его. Массовый расход жидкости в вертикальной части струи  $q = 0,15 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ . Плотность жидкости  $\rho = 0,95 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

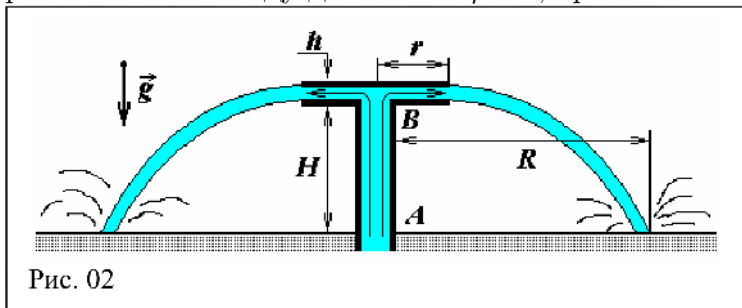
В начальный момент времени жидкости на поверхности не было. Найдите:

**2.1.1** Скорость  $v_0$  жидкости в нижнем сечении струи.

**2.1.2** Зависимость радиуса  $R(t)$  пятна «растекания» жидкости по поверхности от времени.

**2.1.3** Зависимость скорости  $v(t)$  движения границы жидкости по плоскости от времени;

**2.2** «Водяной купол» Струя воды подается в Т - образную конструкцию, состоящую из двух одинаковых горизонтальных дисков и при дальнейшем движении образует водяной купол (рис. 02). Расход воды в трубе  $AB$  -  $q = 5,5 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ . Расстояние  $h = 2,0$  мм,  $r = 15$  см,  $H = 0,65$  м. Определите радиус  $R$  водяного купола на земле. Как он изменится при уменьшении расстояния  $h$  между дисками в  $\eta = 2,0$  раза?



Поверхностным натяжением и вязкостью жидкости пренебречь.

### Решение

#### Задание 2 «Вверх – вниз»

1) Рассмотрим струю жидкости радиусом  $r$ , движущуюся со скоростью  $v_0$  по трубе. За промежуток времени  $\Delta t$  через произвольное поперечное сечение  $AB$  (рис. 3) струи площадью  $S = \pi r^2$  пройдет жидкость объемом

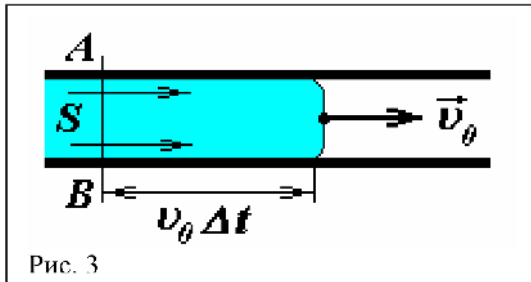
$$V = S \cdot h = S v_0 \Delta t = \pi r^2 v_0 \Delta t.$$

Соответственно для массового расхода в этом случае получаем

$$q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho \pi r^2 v_0 \Delta t}{\Delta t} = \rho \pi r^2 v_0. \quad (1)$$

Из (1) найдем скорость жидкости в вертикальном сечении струи

$$v_0 = \frac{q}{\rho \pi r^2} = 5,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

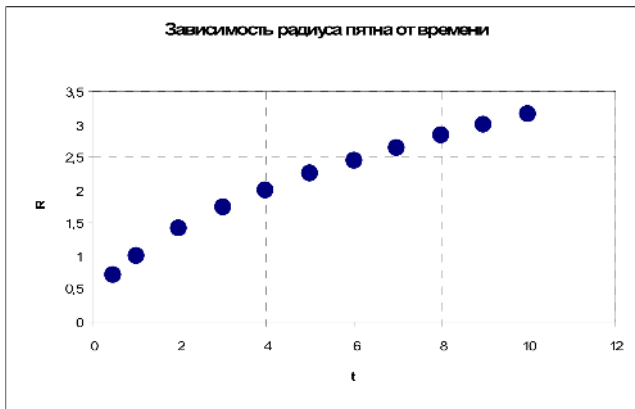


2) Поскольку жидкость несжимаема, то объем жидкости, попавший на поверхность за некоторый промежуток времени  $t$  должен быть равен объему цилиндра, который образует жидкость при растекании по поверхности (см. рис. 01). Пусть радиус пятна в рассматриваемый момент  $R(t)$ , тогда объем образовавшегося цилиндра найдем как  $V = S \cdot h = \pi R^2(t) \cdot h$ . Из этого условия следует, что

$$m = qt = \rho V = \rho \pi R^2(t) h.$$

Из последнего равенства находим

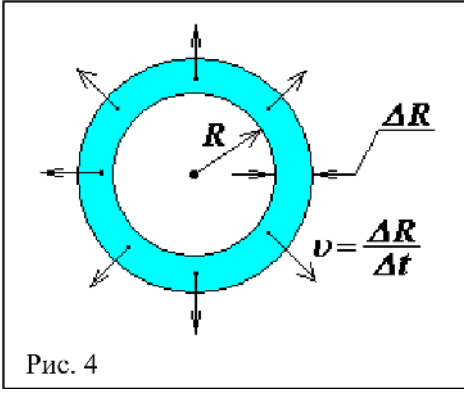
$$R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho \pi h}}. \quad (3)$$



Таким образом, радиус пятна растекания жидкости по поверхности увеличивается с течением времени прямо пропорционально квадратному корню из времени течения

$$R(t) \propto \sqrt{t}.$$

Примерный график полученной зависимости (3) приведен ниже.



3) Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  радиус пятна увеличился на  $\Delta R$  ( $\Delta R \ll R$ ) (рис. 4). Жидкость, поступившая на поверхность за промежуток времени  $\Delta t$ , «заполнит» выделенное на рисунке кольцо (сильно увеличено). Согласно полученному выражению (3) можем записать следующие равенства

$$R^2 = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot t \quad (4)$$

$$(R + \Delta R)^2 = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot (t + \Delta t). \quad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (4), найдем связь между малыми величинами  $\Delta t$  и  $\Delta R$

$$2R\Delta R + \Delta R^2 = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot \Delta t.$$

Поскольку  $\Delta R \ll R$ , то в последнем равенстве можно пренебречь  $\Delta R^2$  по сравнению со слагаемым  $2R\Delta R$ .

Соответственно, для скорости  $v(t)$  движения границы пятна по поверхности получаем

$$v(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot \frac{1}{2R} = \left\{ R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\rho\pi h}} \cdot \frac{1}{t}. \quad (6)$$

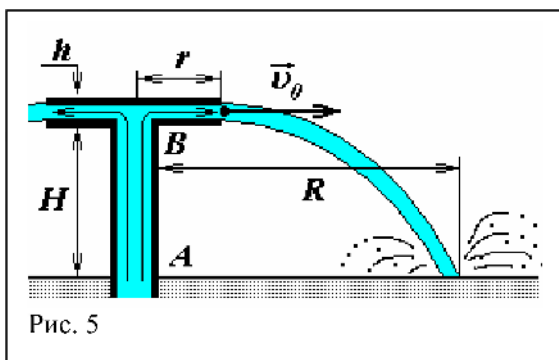
Таким образом, согласно (6) скорость  $v(t)$  движения границы пятна убывает обратно пропорционально квадратному корню от времени

$$v(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Для определения функции  $v(t)$  можно также найти производную от выражения (3) по времени, что несколько быстрее приводит к ответу

$$v(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \left( \sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\rho\pi h t}}. \quad (7)$$

Для получения графика (таблицы) зависимости (6) можно также «вручную» обработать зависимость (3) скажем, для 10 точек и нанести точки на график (см. рис.). При этом получается монотонно убывающий график искомой зависимости  $v(t)$ .

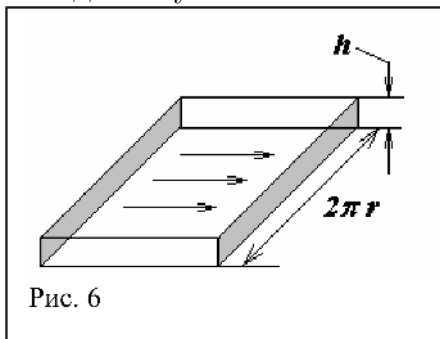


4) Радиус водяного купола на земле определяется величиной  $r$ , а также начальной горизонтальной скоростью  $\vec{v}_0$  струи на выходе из Т - образной конструкции (рис. 5) и временем  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$  полета (падения) частиц воды с высоты  $H$

$$R = r + v_0 t.$$

Масса воды, входящей в трубу  $AB$ , должна быть равна массе воды, выходящей через боковую поверхность конструкции (купола). В противном случае вода накапливалась бы в куполе, чего не происходит.

Это соображение позволит нам вычислить начальную горизонтальную скорость  $\vec{v}_0$  воды на выходе из купола.



Если мысленно «развернуть» боковую поверхность Т - образной конструкции, через которую выходит вода, то получим прямоугольник (выделен на рис. 6) со сторонами  $h$  и  $2\pi r$ .

Следовательно, расход воды через боковую поверхность купола можем записать в виде

$$q\Delta t = \rho 2\pi r h v_0 \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{q}{2\pi \rho r h}.$$

Соответственно, радиус водяного купола найдем, зная время падения воды и ее начальную скорость

$$R = r + v_0 t = r + \frac{q}{2\pi \rho r h} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (8)$$

Расчет по (8) дает

$$R = 1,2 \text{ м.}$$

Как следует из (8), при уменьшении  $h$  в  $\eta = 2,0$  раза новый радиус купола на земле

$$R' = r + v_0 t = r + \frac{q}{\pi \rho r h} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2,3 \text{ м},$$

увеличится в  $\eta = \frac{R'}{R} = 1,9$  раза.

Интересно, что в действующих установках «водяных куполов» при большом значении  $H$  поверхностное натяжение может даже «схлопнуть» купол так, что его радиус практически станет равным нулю. Однако при небольшой высоте купола влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь.