

Кинематическая диаграмма

Условие

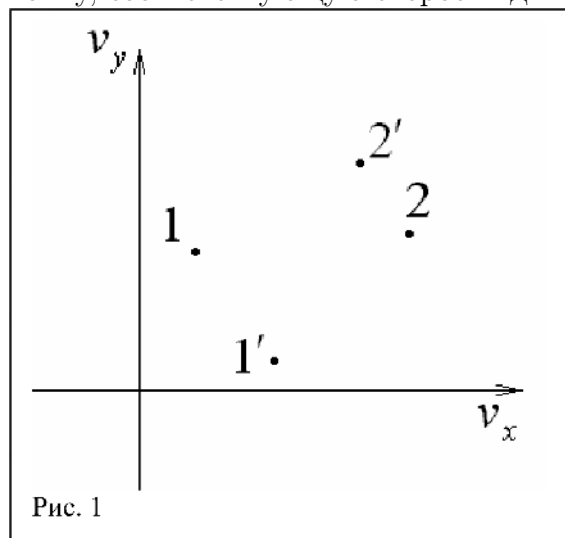
Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

В этой задаче Вам предлагается рассмотреть **абсолютно упругое** соударение двух частиц. Частицы имеют различные массы и скорости, и удар **не обязательно** является центральным. В общем случае – это довольно сложная задача. Однако существует метод, позволяющий легко получить некоторые закономерности рассеяния частиц – метод кинематических диаграмм. Суть этого метода – рассмотрение процесса столкновения в пространстве скоростей.

Будем рассматривать двухмерную задачу, т.е. скорости частиц до соударения имели только две проекции $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ и $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$. Пространство скоростей подобно обычному координатному пространству, только по осям откладываются скорости, а не координаты частиц. В случае двух частиц, на диаграмме будет всего четыре точки: две точки соответствуют скоростям частиц до столкновения и две – после.

1. Как известно, в обычном координатном пространстве центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, находится на соединяющем их отрезке. Покажите, что аналогичная ситуация наблюдается и в пространстве скоростей. Т.е. точка на диаграмме, соответствующая скорости движения центра масс принадлежит отрезку, соединяющему точки, соответствующие скоростям движения материальных точек.

2. Пусть две частицы с произвольными массами до столкновения обладают скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, которым на диаграмме соответствуют две точки: 1 и 2 (см. рис.1). А после некоторого столкновения – скоростями $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ (соответствующие точки 1' и 2'). Обозначьте на диаграмме точку, соответствующую скорости движения центра масс системы.



3. Т.к. мы рассматриваем произвольные столкновения, то существует бесконечное множество вариантов рассеяния. Докажите, что модули скоростей частиц относительно их центра масс не изменяются при упругом столкновении. Найдите геометрическое место всех возможных точек 1' и 2'.

4. Пусть на покоящуюся тяжёлую частицу с массой m_1 налетает лёгкая частица с массой m_2 и со скоростью $\vec{v}_2$. Используя метод кинематических диаграмм, определите, на какой максимальный угол может рассеяться лёгкая частица. Угол рассеяния – это угол между направлением вектора скорости до соударения и направлением вектора скорости после соударения.

5. Рассмотрите также и обратный случай. Пусть на покоящуюся лёгкую частицу с массой m_2 налетает тяжёлая частица с массой m_1 и со скоростью $\vec{v}_1$. На какой максимальный угол

может рассеяться тяжёлая частица?

Решение

Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

1. Доказательство можно провести формально. Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2. \quad (1)$$

Аналогично определяется скорость центра масс:

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{\Delta \vec{r}_{\text{цм}}}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2. \quad (2)$$

Т.е. вектор скорости центра масс составляется так же как вектор центра масс. Поэтому его конец (а точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых – в начале координат) также лежит между точками, соответствующими скоростям движения отдельных частиц.

2. Как следует из предыдущего пункта, точка, соответствующая центру масс до соударения должна лежать на отрезке 12, а после соударения на отрезке 1'2'. Кроме того, в результате столкновения скорость центра масс не изменяется. Значит, центр масс находится на пересечении этих отрезков. Обозначим эту точку буквой O .

3. Чтобы доказать, что четырёхугольник 11'22' является равнобокой трапецией, достаточно доказать, что треугольники 1O1' и 2O2' являются равнобедренными. Действительно, в этом случае они окажутся подобными, а значит $\angle 1'1O = \angle 2'2O$, т.е. прямые 11' и 22' параллельны. Кроме того, из равнобедренности этих треугольников следует равенство треугольников 1O2' и 2O1', а значит и равенство «боков» трапеции.

С физической точки зрения равнобедренность упомянутых треугольников означает, что скорости движения частиц относительно их общего центра масс остаётся неизменной при соударении. Докажем это далеко не очевидный факт.

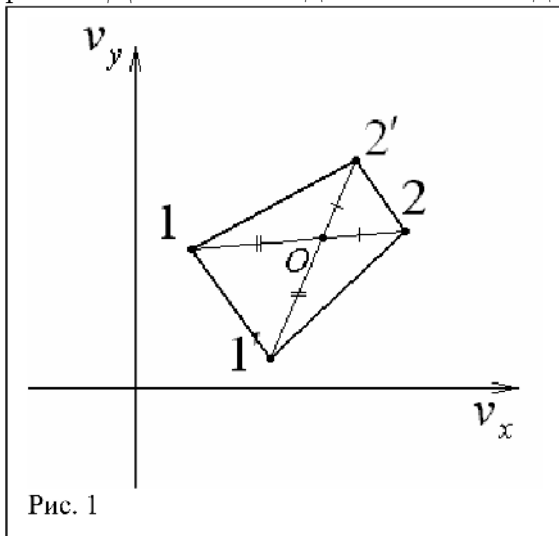


Рис. 1

Обозначим скорость движения первой частицы относительно центра масс до соударения $\vec{u}_1$, а после столкновения — $\vec{u}'_1$. Аналогично для второй частицы $\vec{u}_2$ и $\vec{u}'_2$. Закон сохранения импульса, записанный в системе центра масс до соударения:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

Аналогично после соударения:

$$m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = \vec{0} \quad (4)$$

Т.к. в этой системе отсчёта частицы движутся навстречу друг другу, то вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ противоположно направлены. Т.е. законы сохранения импульса принимает вид:

$$m_1 u_1 = m_2 u_2 \quad (5)$$

$$m_1 u'_1 = m_2 u'_2 \quad (6)$$

Кроме того (удар абсолютно упругий) выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 u'^2_1}{2} + \frac{m_2 u'^2_2}{2} \quad (7)$$

Выражая u_1 из (5), а u'_1 из (6) и подставляя в (7), получим, что $u_1 = u'_1$. Аналогично и $u_2 = u'_2$. Что и требовалось доказать. Это можно легко понять исходя из следующих рассуждений. В системе центра масс скорость второй (первой) частицы однозначно выражается через скорость первой (второй). Значит кинетическая энергия системы, также однозначно определяется скоростью первой (второй) частицы. А раз механическая энергия сохраняется, то неизменной остаётся и скорость первой (второй) частицы. **4.** Из предыдущего доказательства следует, что при рассеянии возможны только ситуации, когда $u_1 = u'_1$ и $u_2 = u'_2$. Значит, геометрическое место точек всех возможных рассеяний представляет собой две окружности с общим центром масс и радиусами u_1 и u_2 (см. рис. 2.). **5.** Это столкновение изображено на рисунке 3. Точка 2', также как и точка 2, будет находиться на окружности большего радиуса. Вспомним ещё раз, что точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых находится в начале координат. Угол 212' и есть угол, на который поворачивается вектор скорости. Как видно, вектор скорости лёгкой частицы может повернуться на любой угол от нуля до 180 градусов в том или другом направлении. **6.** В этом пункте ситуация иная. Теперь скорость рассеиваемой частицы принадлежит окружности меньшего радиуса (см. рис.4). Поэтому максимальное отклонение вектора скорости

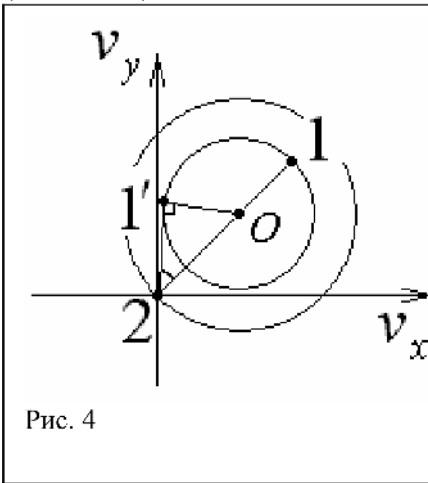


Рис. 4

реализуется только в том случае, когда $21' \perp O1'$. Максимальный угол легко находится из треугольника $21'O$:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8)$$

Т.К. $u_1 = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$, а $u_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

