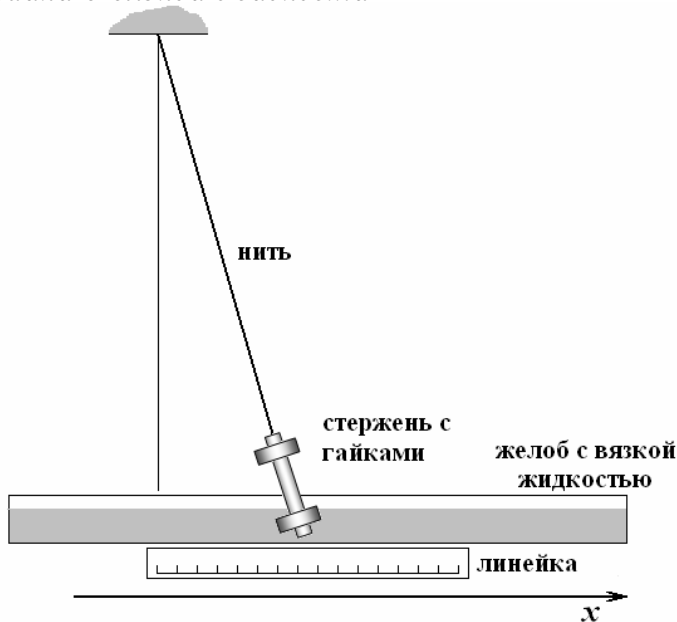


Условие

Задание 1. Лобовое сопротивление.

В данной работе вам необходимо измерить коэффициент лобового сопротивления движения гайки в вязкой жидкости.



Приборы и оборудование. Стержень с двумя гайками, желоб с вязкой жидкостью (жидкое мыло), линейка 40 см, секундомер, весы с разновесами, вилка одноразовая.

Для вас собрана установка: к потолку привязана длинная нить, к нижнему концу которой прикрепляется стержень, на который можно накручивать одинаковые гайки. Гайка может двигаться в желобе с вязкой жидкостью. С помощью линейки можно измерять положение стержня с гайкой в различные моменты времени, то есть изучать закон ее движения $x(t)$.

Будем считать, что сила сопротивления, действующая на гайку со стороны жидкости, пропорциональна скорости гайки

$$\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta \vec{v}, \quad (1)$$

где β - коэффициент лобового сопротивления.

Часть 1. Теоретическая модель.

1.1 Используя формулу (1) и предварительные наблюдения над движением гайки в жидкости, покажите, что закон движения гайки $x(t)$ описывается уравнениями

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x_0 \exp(-\gamma t), \quad (2)$$

где x_0 - начальное отклонение положения гайки от положения равновесия.

1.2 Выразите значение коэффициента γ через параметры установки.

Часть 2. Параметры установки.

2.1 Измерьте массы гайки и стержня.

2.2 Для измерения длины нити используйте секундомер. Измерьте период колебаний маятника (без вязкой жидкости). Рассчитайте длину маятника. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 3. Изучение закона движения.

3.1 Проведите измерения зависимости координаты гайки от времени $x(t)$ в двух случаях с одной гайкой внизу и с двумя гайками (одна внизу стержня, вторая сверху).

Следите, чтобы гайка или стержень в процессе движения не касались дна и стенок желоба. При проведении измерений с двумя гайками, верхняя гайка должна находиться выше жидкости. Перед каждым измерением тщательно перемешивайте жидкость в желобе, так как на ней может образовываться поверхностная пленка, существенно влияющая на результаты измерений.

3.2 Постройте графики законов движения для двух случаев.

3.3 Покажите, что результаты измерений закона движения соответствуют теоретической модели (2).

3.4 Рассчитайте значения коэффициентов γ в формулах (2) для двух экспериментально изученных случаев.

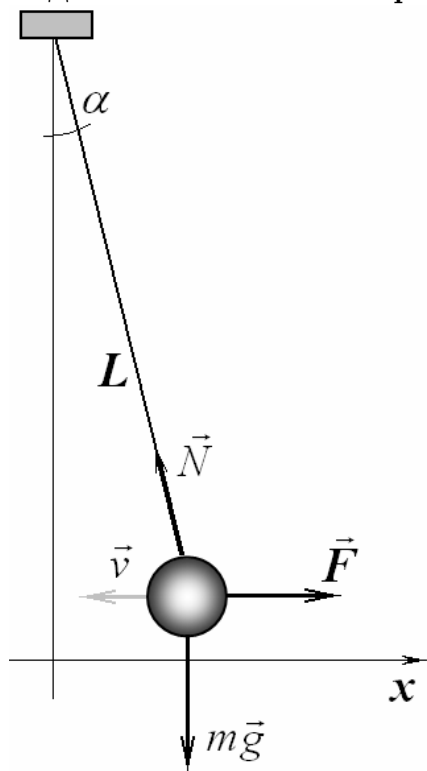
Соответствуют ли полученные значения этих коэффициентов значениям измеренных масс?

Часть 4. Итоги.

4.1 Рассчитайте коэффициент лобового сопротивления при движении гайки в вязкой жидкости.

Решение

Задание 1. Лобовое сопротивление.



1.1 На основании второго закона Ньютона и с учетом малости угла отклонения $\alpha = \frac{x}{L}$ запишем уравнение:

$$ma = -mg\alpha - \beta v. \quad (1)$$

Так как ускорение и скорость движения очень малы, то в этом уравнении можно пренебречь слагаемым ma , тогда уравнение движения приобретает вид

$$v = -\frac{mg}{\beta L}x \quad (2)$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma x, \quad (3)$$

где

$$\gamma = \frac{mg}{\beta L}. \quad (4)$$

Часть 2. Параметры установки.

2.1 Измеренные значения масс гайки m и стержня m_0 равны

$$m = (4,5 \pm 0,1) \text{ г}$$

$$m_0 = (1,5 \pm 0,1) \text{ г.}$$

2.2 Период колебаний маятника

$$T = (3,67 \pm 0,05) \text{ с.}$$

Используя формулу для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (5)$$

рассчитаем длину нити

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 3,347 \text{ м}, \quad \Delta L = 2L \frac{\Delta T}{T} = 0,09 \text{ м.}$$

Окончательно получаем

$$L = (3,35 \pm 0,09) \text{ м.} \quad (6)$$

Часть 3. Изучение закона движения.

Результаты измерений времени движения до соответствующего значения координаты для маятника с одной и двумя гайками приведены в Таблице 1. На рис. 2 показаны графики законов движения, построенные по этим данным.

Таблица 1. Результаты измерений времени движения.

1 гайка		2 гайки	
x , см	t , с	x , см	t , с
15	0	15	0
14	5	14	3
13	10	13	6
12	16	12	9
11	22	11	14
10	29	10	18
9	39	9	23
8	49	8	29
7	60	7	35
6	74	6	43
5	92	5	54
4	117	4	67
3	143	3	83
2	186	2	108

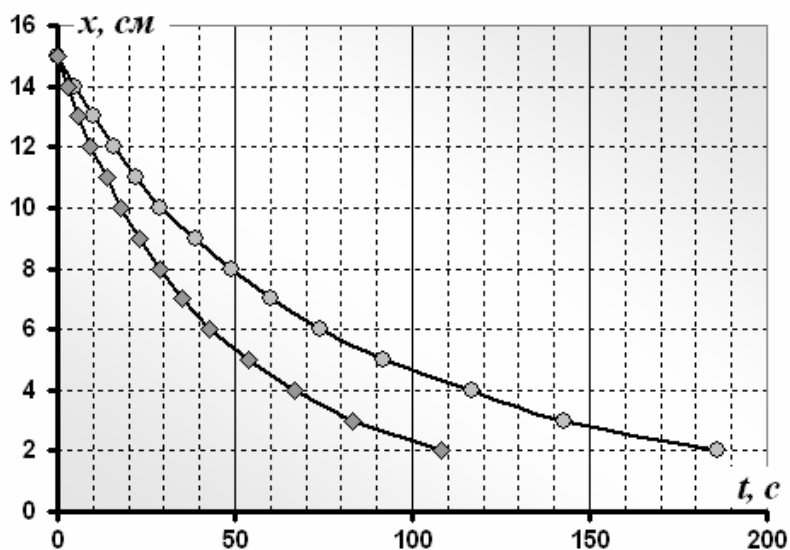


Рис. 2 Закон движения

Полученные зависимости похожи на экспоненциальные. Для проверки этого утверждения необходимо построить эти графики в полупологарифмическом масштабе. Так как в ходе экспериментов непосредственно измерялось время достижения определенного значения координаты, то предпочтительнее¹ построить графики зависимости времени от логарифма координаты $t(\ln(x))$. Эти графики приведены на рис. 3 (при расчете учтено смещение нулевого положения маятника $x_0 = 1,5$ см).

Как и следовало ожидать, получены линейные зависимости. В соответствии с приведенным законом движения

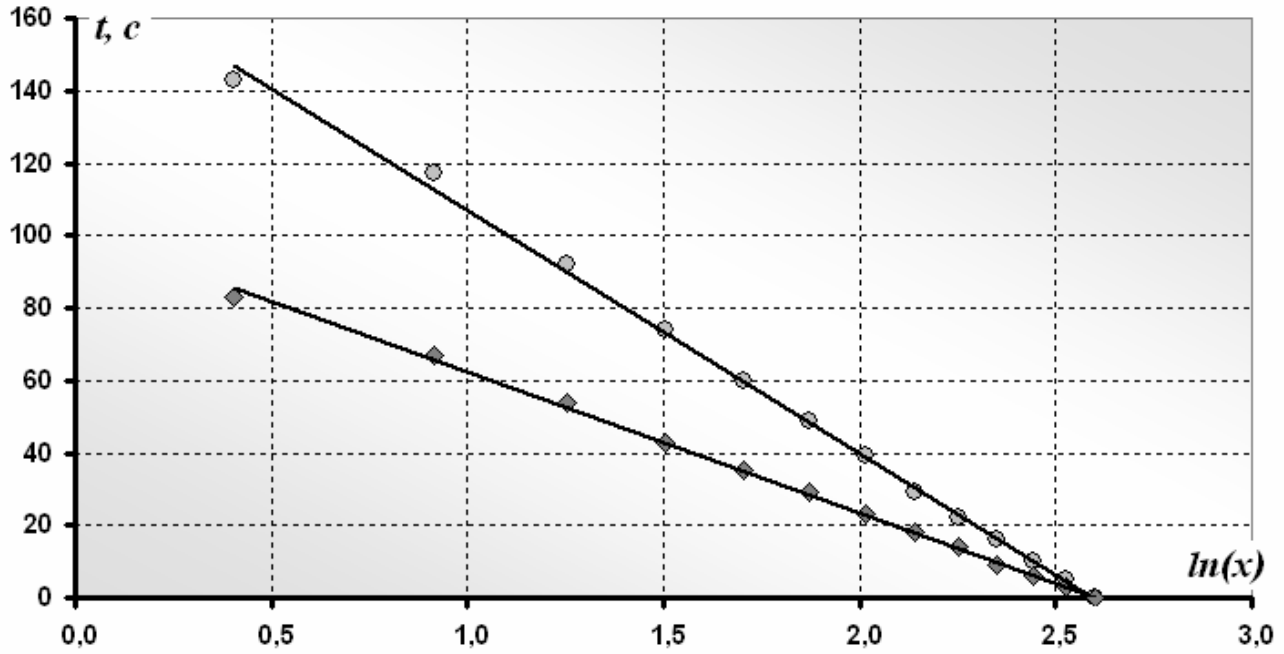


Рис. 3 Зависимость времени от координаты
(полулогарифмический масштаб)

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t), \quad (7)$$

Теоретически зависимости, приведенные на рис. 3 описываются функцией

$$t = -\frac{1}{\gamma}(\ln(x) - \ln(x_0)). \quad (8)$$

Следовательно, коэффициенты наклона графиков численно равны γ^{-1} .

¹ В этом случае применение метода наименьших квадратов обосновывается более строго. Не будет большой ошибкой и традиционное построение зависимости логарифма координаты от времени.

Обработка этих зависимостей по МНК (где $t = a \ln(x) + b$) приводит к следующим значениям коэффициентов наклона для маятника с одной и двумя гайками, соответственно

$$a_1 = -(67,2 \pm 1,7)c$$

$$a_2 = -(38,7 \pm 0,9)c$$

В соответствии с формулой (4) отношение этих коэффициентов должно быть равно обратному отношению масс грузов, подвешенных к маятнику. Вычислим это отношение:

$$\frac{a_1}{a_2} = (1,74 \pm 0,06).$$

Рассчитаем также отношение масс грузов

$$m_1 = m + m_0 = 6,0 \text{ z}, \quad \Delta m_1 = \sqrt{(\Delta m)^2 + (\Delta m_0)^2} = 0,14 \text{ z};$$

$$m_2 = 2m + m_0 = 10,5 z, \quad \Delta m_2 = \sqrt{(2\Delta m)^2 + (\Delta m_0)^2} = 0,22 z;$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 1,75 \quad \Delta \left(\frac{m_1}{m_2} \right) = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2} \right)^2} = 0,05.$$

Таким образом, полученные данные соответствуют теоретической модели. Значение параметров γ в двух случаях равны:

$$\gamma_1 = (2,58 \pm 0,06) \cdot 10^{-2} c^{-1}$$

$$\gamma_2 = (1,49 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} c^{-1}.$$

Часть 4. Итоги.

4.1 Из выражения (4) следуют формулы для расчета коэффициента лобового сопротивления

$$\beta = \frac{mg}{\gamma L} = a \frac{mg}{L}, \quad \Delta \beta = \beta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2}. \quad (9)$$

Расчеты по ним приводят к следующим значениям искомого параметра:

- маятник с одной гайкой

$$\beta_1 = a_1 \frac{m_1 g}{L} = 67,2 \frac{6,0 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3,35} \approx 1,18 \frac{\text{кг}}{c}, \quad \Delta \beta_1 = 0,04 \frac{\text{кг}}{c};$$

- маятник с двумя гайками

$$\beta_2 = a_2 \frac{m_2 g}{L} = 38,7 \frac{10,5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3,35} \approx 1,19 \frac{\text{кг}}{c}, \quad \Delta \beta_2 = 0,05 \frac{\text{кг}}{c};$$

Окончательный результат можно представить в виде

$$\beta = (1,18 \pm 0,04) \frac{\text{кг}}{c}.$$

Задание 1. Сопротивление графита.

Часть 1. Теоретическая.

В условии приведены формулы, определяющие стационарный режим протекания тока и значения температуры:

$$R = R_0(1 - \alpha \Delta T). \quad (1)$$

$$P = \beta \Delta T. \quad (2)$$

В стационарном режиме вся мощность, выделяющаяся на стержне при протекании тока, рассеивается в окружающую среду. Выражая из формулы (2) разность температур и подставляя в формулу (1) получим

$$R = R_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} P \right) = R_0(1 - \gamma P). \quad (3)$$

Следовательно, параметр равен

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4)$$

и имеет смысл мощностного коэффициента сопротивления, указывает относительное изменение сопротивления при изменении мощности на нем на 1 Вт.

Запишем очевидное уравнение теплового баланса для стержня с зажимами

$$cm\Delta T = (P - \beta(T - T_0))\Delta t, \quad (5)$$

где T_0 - комнатная температура. Так как сила тока слабо изменяется при небольшом изменении температуры, то выделяющуюся мощность можно считать примерно постоянной. Уравнение (5) перепишем в виде

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{\beta}{cm} \left(T - \frac{P + \beta T_0}{\beta} \right) = -\frac{1}{\tau} (T - \bar{T}), \quad (6)$$

где обозначено - характерное время установления теплового равновесия:

$$\tau = \frac{cm}{\beta}; \quad (7)$$

- стационарная температура (не нужная в дальнейшем): $\bar{T} = \frac{P + \beta T_0}{\beta}$. Из формул (4) и (7) находим

$$\alpha = \gamma\beta = \gamma \frac{cm}{\tau}. \quad (8)$$

Часть 2. Стационарный режим.

Для проведения измерений следует использовать следующую схему. Резистор R_0 должен иметь минимальное значение, что бы достичь максимально возможного значения силы тока через графитовый стержень.

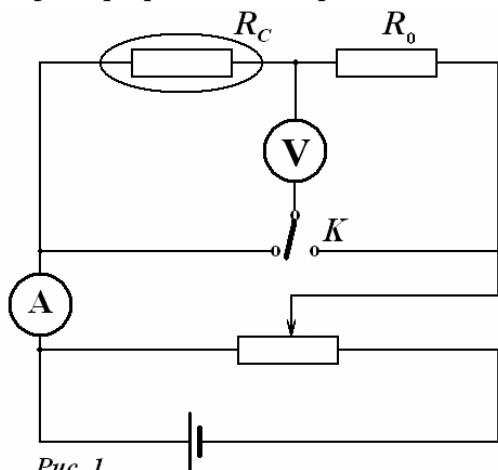


Рис. 1

2.1 Результаты измерений напряжений на графитовом стержне U_C и резисторе U_0 , а также расчетов силы тока I , мощности, выделяющейся на стержне P , и сопротивления стержня R представлены в таблице 1.

Расчетные формулы хорошо известны:

- сила тока: $I = \frac{U_0}{R_0}$, использован резистор с сопротивлением $R_0 = 0,51 \text{ Ом}$;
- мощность: $P = UI$;
- сопротивление: $R = \frac{U}{I}$.

Таблица 1. Стационарный режим. Результаты измерений и расчетов.

Нагрев					Остывание				
U_0 , мВ	U_C , мВ	I , мА	P , мВт	R , Ом	U_0 , мВ	U_C , мВ	I , мА	P , мВт	R , Ом
13	27	25,5	0,69	1,059	680	1260	1333,3	1680,0	0,945
39	82	76,5	6,27	1,072	617	1150	1209,8	1391,3	0,951
61	128	119,6	15,3	1,070	590	1105	1156,9	1278,3	0,955
86	181	168,6	30,5	1,073	563	1062	1103,9	1172,4	0,962
112	234	219,6	51,4	1,066	531	1002	1041,2	1043,3	0,962
146	306	286,3	87,6	1,069	512	972	1003,9	975,8	0,968
164	344	321,6	110,6	1,070	490	935	960,8	898,3	0,973
191	398	374,5	149,1	1,063	453	872	888,2	774,5	0,982
224	463	439,2	203,4	1,054	413	803	809,8	650,3	0,992
244	502	478,4	240,2	1,049	388	756	760,8	575,2	0,994
267	550	523,5	287,9	1,051	349	686	684,3	469,4	1,002
293	594	574,5	341,3	1,034	324	639	635,3	406,0	1,006
314	633	615,7	389,7	1,028	279	556	547,1	304,2	1,016
339	683	664,7	454,0	1,028	237	476	464,7	221,2	1,024
366	731	717,6	524,6	1,019	210	424	411,8	174,6	1,030
389	773	762,7	589,6	1,013	186	378	364,7	137,9	1,036
421	833	825,5	687,6	1,009	157	320	307,8	98,51	1,039
443	872	868,6	757,4	1,004	129	263	252,9	66,52	1,040
470	917	921,6	845,1	0,995	107	220	209,8	46,16	1,049
497	963	974,5	938,5	0,988	79	163	154,9	25,25	1,052
522	1005	1023,5	1028,6	0,982	56	117	109,8	12,85	1,066
538	1041	1054,9	1098,2	0,987	33	69	64,71	4,46	1,066
567	1084	1111,8	1205,2	0,975	13	27	25,49	0,69	1,059
584	1108	1145,1	1268,8	0,968					
622	1168	1219,6	1424,5	0,958					
660	1221	1294,1	1580,1	0,944					
703	1284	1378,4	1769,9	0,931					

1.3 Графики зависимостей силы тока от напряжения на графитовом стержне при нагреве и остывании показаны на рис. 2. Полученные результаты показывают, что эти зависимости практически совпадают, что свидетельствует о том, что в процессе измерений стационарный режим достигается.

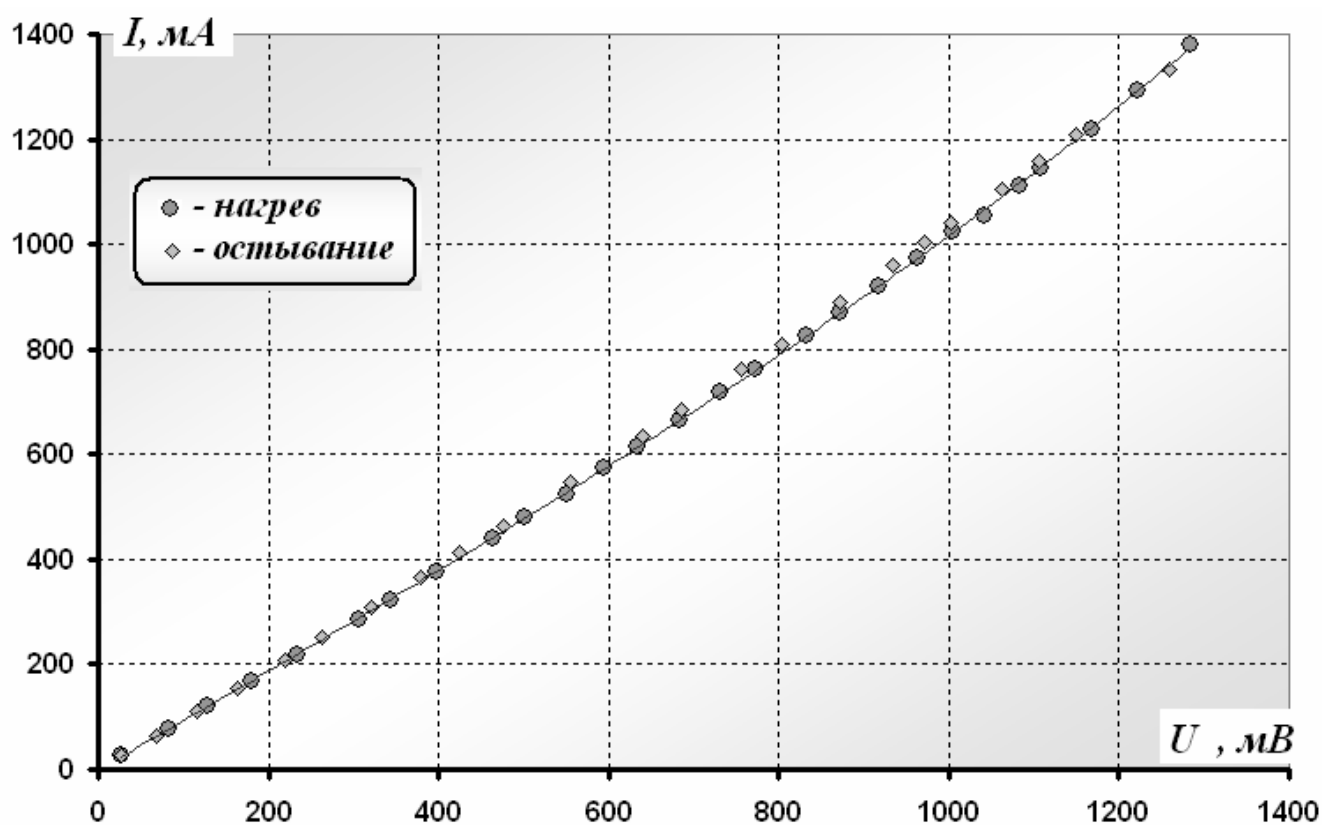


Рис. 2 Вольт-амперная характеристика стержня

Рис. 2 Вольт-амперная характеристика стержня

На рис. 3 показаны зависимости сопротивления стержня от мощности, выделяющейся на нем.

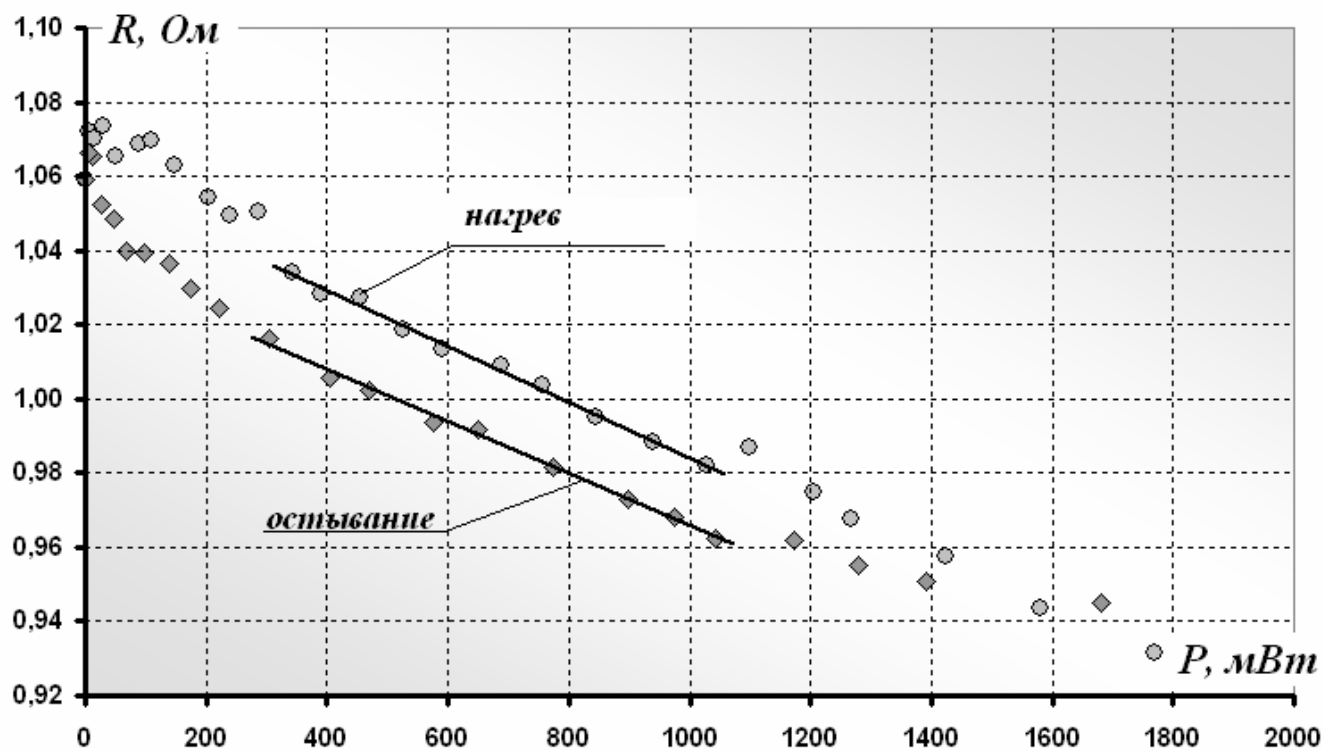


Рис. 3 Зависимость сопротивления стержня от мощности

Рис. 3 Зависимость сопротивления стержня от мощности

Полученные зависимости близки к линейным, большой разброс наблюдается при малых силах токов, что вероятнее всего связано с погрешностями измерений; и при больших токах, где вероятнее всего, существенны конвективные потоки воздуха. Тем не менее, не сложно выделить линейные участки на обоих графиках (Они указаны на рис. 3 и жирным шрифтом в Таблице 1).

Эти линейные участки можно обработать по методу наименьших квадратов (или графически), полагая

$$R = aP + b. \quad (9)$$

Из сравнения с искомой зависимостью $R = R_0(1 - \gamma P)$ получаем, что характеристики графитового стержня могут быть рассчитаны по параметрам линейной зависимости

$$R_0 = b, \quad \gamma = -\frac{a}{b}. \quad (10)$$

Проведенные расчеты приводят к следующим численным значениям: - при нагреве

$$a = -(7,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{мВт}^{-1}$$

$$b = R_0 = 1,060 \pm 0,003 \text{ Ом}$$

$$\gamma = (7,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ мВт}^{-1} = (7,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-2} \text{ Вт}^{-1}$$

- при остывании

$$a = -(7,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{мВт}^{-1}$$

$$b = R_0 = 1,036 \pm 0,003 \text{ Ом}$$

$$\gamma = (6,7 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ мВт}^{-1} = (6,7 \pm 0,3) \cdot 10^{-2} \text{ Вт}^{-1}$$

В пределах погрешности измерений коэффициенты γ оказываются равными. Численные значения параметра R_0 несколько различаются, что видно и на графике 2. Этот факт вполне объясним – при остывании температура оказывается немного выше (хотя это и не слишком существенно для данной работы).

Среднее значение мощностного коэффициента сопротивления равно

$$\bar{\gamma} = (6,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-2} \text{ Вт}^{-1}. \quad (11)$$

Часть 3. Остывание.

3.1 Результаты измерений зависимости напряжения от времени по предложенной схеме и последующих расчетов (см. ниже) приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Результаты измерений зависимости напряжения от времени и расчеты параметров.

t, c	$U, мВ$	$U_{cp.}, мВ$	$\frac{\Delta U}{\Delta t}, \frac{мВ}{c}$	$\ln(U - \bar{U})$
0	12,0			2,067
10	11,0	11,5	0,1000	1,932
20	10,0	10,5	0,1000	1,775
26	9,5	9,75	0,0833	1,686
31	9,0	9,25	0,1000	1,589
40	8,5	8,75	0,0556	1,482
47	8,0	8,25	0,0714	1,361
57	7,5	7,75	0,0500	1,224
67	7,0	7,25	0,0500	1,065
80	6,5	6,75	0,0385	0,875
96	6,0	6,25	0,0313	0,642
115	5,5	5,75	0,0263	0,336
155	5,0	5,25	0,0125	-0,105
207	4,5	4,75	0,0096	-0,916

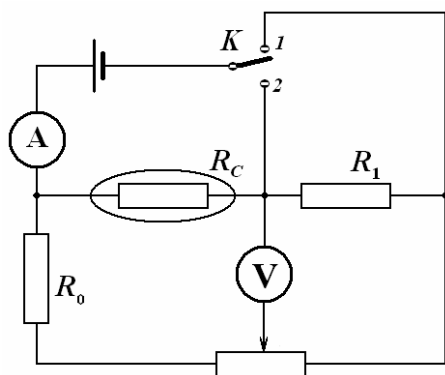


Рис.3

График полученной зависимости показан на рис. 4. Отметим, что фактически данный график представляет также зависимость температуры (в относительных единицах) от времени. Поэтому теоретические зависимости для напряжения можно переписать из условия, заменив температуру измеренным напряжением:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau}(U - \bar{U}). \quad (4)$$

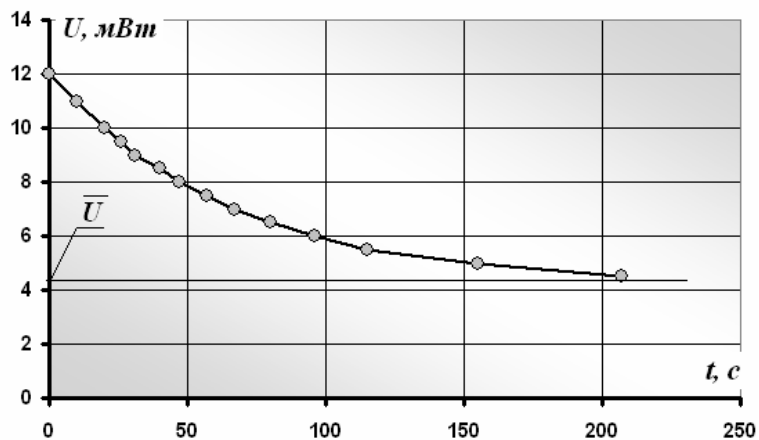


Рис. 4 Зависимость напряжения от времени

$$(U - \bar{U}) = (U - \bar{U})_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5)$$

Полученная кривая похожа на экспоненту, что качественно подтверждает предложенную модель теплоотдачи. Как видно из графика, напряжение не стремится к нулевому значению. Можно, конечно, по графику приближенно оценить стационарное значение этого напряжения $\bar{U} \approx 4$ В, необходимое для дальнейшего для дальнейшей проверки записанных законов и определения их параметров. Однако предпочтительнее непосредственно проверить справедливость уравнения (4)! Для двух соседних точек следует рассчитать значения скорости изменения напряжения («для красоты», взятую с обратным знаком)

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right)_k = \frac{U_k - U_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, \quad (6)$$

среднего напряжения на данном участке

$$U_{\text{ср.}k} = \frac{U_k + U_{k-1}}{2} \quad (7)$$

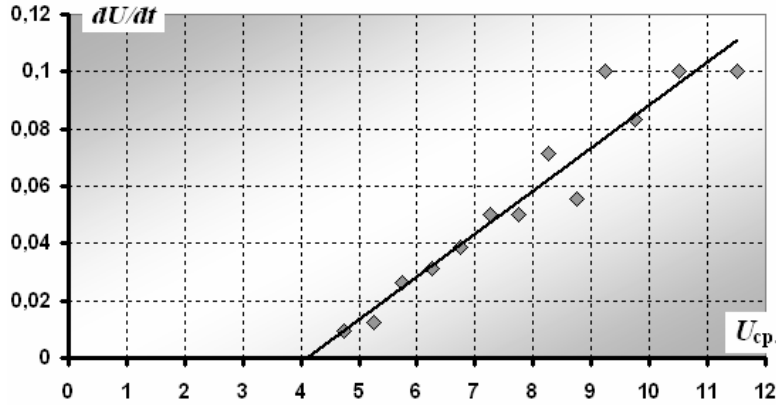


Рис. 5 Зависимость скорости изменения напряжения от напряжения

и построить график их зависимости.

Результаты расчетов этих величин приведены в таблице 2, а график показан на рис. 5.

Как видно из графика уравнение (4) выполняется (если отбросить начальные точки, где скорость изменения велика, промежутки времени малы, поэтому и погрешность высока). Обработка линейной зависимости

$$-\frac{\Delta U}{\Delta t} = aU_{\text{ср.}} + b \quad (8)$$

по МНК² приводит к следующим значениям параметров

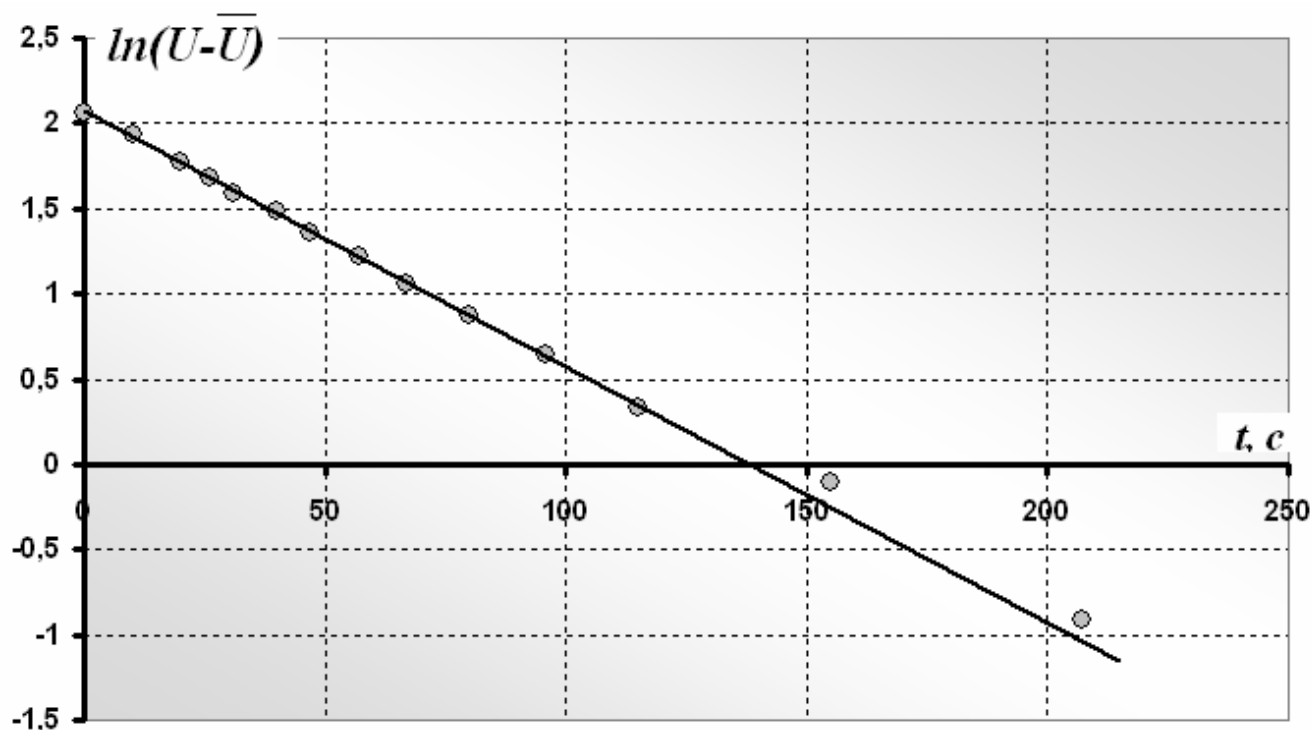
$$a = 0,0150 \text{ с}^{-1}, \quad b = 0,0617 \text{ В.}$$

Сравнивая теоретическую зависимость (4) с линейной функцией, позволяет определить параметры уравнения (4)

² Понятно, что точность процедуры численного вычисления производной низка, поэтому не следует проводить расчет погрешностей параметров этой зависимости, самое важное в этом графике – возможность определить стационарное значение напряжения.

$$\tau = \frac{1}{a} \approx 67 \text{ с}, \quad \bar{U} = \frac{b}{a} \approx 4,1 \text{ В}. \quad (9)$$

Найденное значение предельного напряжения позволяет теперь проанализировать «интегральную» зависимость (5). Для этого построим график зависимости $\ln(U - \bar{U})$ от времени (рис. 6)



**Рис. 6 Зависимость напряжения от времени
(полулогарифмический масштаб)**

**Рис. 6 Зависимость напряжения от времени
(полулогарифмический масштаб)**

Как видно, точки прекрасно легли на прямую (за исключением двух последних – где напряжение близко к предельному, поэтому точность измерений мала). Коэффициент наклона данной прямой, рассчитанный по МНК, равен

$$a = -(0,0150 \pm 0,0002) \text{ с}^{-1},$$

Что дает значение времени установления теплового равновесия

$$\tau = (66,7 \pm 0,07) \text{ с} \quad (10)$$

с погрешностью порядка 1%.

Часть 4. Итоги.

4.1 По формуле (8) рассчитываем температурный коэффициент сопротивления графита

$$\alpha = \gamma \frac{ct}{\tau} = 6,9 \cdot 10^{-2} \text{ Вм}^{-1} \frac{0,47 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 3,0 \cdot 10^3 \text{ кг}}{66,7 \text{ с}} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}. \quad (11)$$

4.2 В ходе измерений в Части 2 сопротивление графита упало от 1,06 Ом до 0,93 Ом. Это позволяет оценить изменение температуры стержня

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta R}{R_0} \approx \frac{1,06 - 0,93}{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,06} \approx 90^\circ. \quad (12)$$

¹ . В этом случае применение метода наименьших квадратов обосновывается более строго. Не будет большой ошибкой и традиционное построение зависимости логарифма координаты от времени.

² , , Понятно, что точность процедуры численного вычисления производной низка, поэтому не следует проводить расчет погрешностей параметров этой зависимости, самое важное в этом графике – возможность определить стационарное значение напряжения.