

Маленький принц

Условие

Задание 1. «Маленький принц»



Согласно «теории» Антуана де Сент Экзюпери к нам на Землю прилетал Маленький Принц. Родиной героя являлась малая планета, судя по всему – астероид. Примем за родину Маленького принца Астероид со следующими характеристиками:

Астероид движется вокруг Солнца по круговой орбите радиусом 2,5 а.е. в том же направлении, что и Земля.

Астероид представляет собой шар радиусом $r_A = 10$ км.

Средняя плотность вещества Астероида $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Справочные данные. Среднее расстояние от Земли до Солнца называют астрономической единицей 1 а.е. = $1,46 \cdot 10^{11}$ м.

Год на Земле длится 1 год. Сутки на Земле 1 сут. = 24 часа. Ускорение свободного падения на поверхности земли принять равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Объем шара рассчитывается по формуле $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



Справка. В Солнечной системе между орбитами Марса и Юпитера существует пояс астероидов (звездоподобных, малых планет). В 2000 году каталог зарегистрированных астероидов насчитывал 18200 астероидов, из которых почти 9 тыс. имеют персональное название. Чтобы показать реальность наших допущений, приведем параметры известного астероида «Отто Шмидт», у которого большая полуось орбиты $a = 2,436$ а.е., эксцентриситет $\varepsilon = 0,006$, диаметр астероида $D = 16$ км, плотность $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$.

1.1 Сколько времени длится год на Астероиде Маленького Принца?

1.2 Допустим, что наименьшее расстояние от этого Астероида до Земли было 1 января 2009 года, рассчитайте, когда опять расстояние между нашими планетами станет наименьшим. Чему оно равно?

1.3 Чему равно ускорение свободного падения на этом Астероиде?

1.4 Чему равна первая космическая скорость для этого Астероида?

1.5 Гуляя по планете, маленький принц при помощи пружинных весов обнаружил, что вес тел на экваторе планеты меньше, чем на полюсе на $\eta = 10\%$. Чему равна продолжительность суток на Астероиде?

1.6.1 На какую высоту подпрыгнет Маленький Принц на астероиде, если на Земле он подпрыгивает вверх на высоту $h_0 = 0,50$ м? Считайте, что начальная скорость прыжка одинакова на Земле и на Астероиде. Считайте, что изменением ускорения свободного падения на высоте прыжка можно пренебречь.

1.6.2 Оцените, на сколько процентов уменьшится ускорение свободного падения на максимальной высоте прыжка на Астероиде.

1.6.3 Оцените, какую относительную ошибку вы допустили в п. 1.6.1, считая ускорение свободного падения не зависящим от высоты над поверхностью астероида.

Решение

Задание 1. «Маленький принц»



1.1 По второму закону Ньютона (с учетом закона всемирного тяготения)

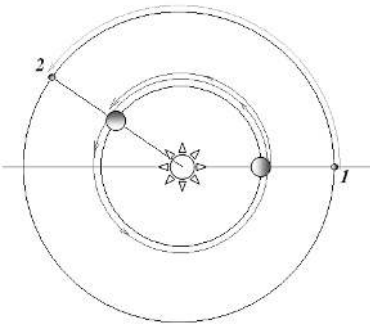
$$G \frac{M_{\text{С}} m}{R^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R, \quad (1)$$

где m – масса планеты, R – радиус орбиты планеты, T – период обращения планеты вокруг Солнца. Сравним движение Астероида и Земли, получим

$$T_{\text{А}} = T_{\text{З}} \sqrt{\left(\frac{R_{\text{А}}}{R_{\text{З}}}\right)^3} \approx 1 \sqrt{\left(\frac{2,5}{1}\right)^3} \approx 4,0 \text{ года.} \quad (2)$$

1.2. Наименьшее расстояние между астероидом и Землей будет, когда Солнце, Земля и Астероид установятся на одной прямой (точка 1 на рис.). При этом расстояние между Астероидом и Землей равно

$$L = R_{\text{А}} - R_{\text{З}} = 1,5 \text{ а.е.} \approx 2,2 \cdot 10^{11} \text{ м.} \quad (3)$$



Следующий раз такая ситуация повторится, когда Земля в своем движении вокруг Солнца обгонит астероид на угол 2π , (или 360°) – точка 2. Относительная угловая скорость Земли относительно астероида равна $\omega_{\text{отн.}} = \omega_{\text{З}} - \omega_{\text{А}} = \frac{2\pi}{T_{\text{З}}} - \frac{2\pi}{T_{\text{А}}}$. Следовательно, время движения можно рассчитать по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_{\text{отн.}}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_3} - \frac{2\pi}{T_A}} = \frac{T_3 T_A}{T_A - T_3} \approx 1,33 \text{ года.} \quad (4)$$

Таким образом, следующий раз минимальное расстояние между Землей и Астероидом случится через 1,33 года, т.е. примерно 1 мая 2010 года.

1.3. На любое тело, на поверхности Астероида, действует сила всемирного тяготения, сообщающая ему ускорение g_A , которое можно выразить из уравнения

$$mg_A = G \frac{M_A m}{r_A^2}; \quad \Rightarrow \quad g_A = G \frac{M_A}{r_A^2}. \quad (5)$$

Масса Астероида выражается через его плотность

$$M_A = \rho V = \frac{4}{3} \pi r_A^3 \rho. \quad (6)$$

Подстановка формулы для массы в формулу (5) и последующий расчет приводит к результату

$$g_A = \frac{4\pi}{3} G r_A \rho = \frac{4\pi}{3} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (7)$$

1.4. Первая космическая скорость соответствует скорости движения по круговой орбите с радиусом, равным радиусу астероида, поэтому

$$m \frac{v^2}{r_A} = mg_A \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g_A r_A} = \sqrt{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3} \approx 8,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8)$$

1.5. Вес тела на полюсе планеты численно равен силе тяжести, действующей на тело

$$P_0 = mg_A. \quad (9)$$

На экваторе планеты вес тела уменьшается из-за суточного вращения планеты, поэтому на экваторе вес тела оказывается равным

$$P_1 = mg_A - m\omega^2 r_A = mg_A - m \frac{4\pi^2}{T_A^2} r_A = mg_A \left(1 - 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A} \right). \quad (10)$$

Следовательно, относительное изменение веса тела равно

$$\eta = 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A}. \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Астероида вокруг собственной оси (т.е. сутки) рассчитывается по формуле

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{r_A}{\eta g_A}} \approx 2,3 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 6,4 \text{ часа.} \quad (12)$$

1.6.1 Высота прыжка рассчитывается по известной формуле

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (13)$$

Так как начальная скорость прыжка одинакова на Земле и Астероиде, то высота прыжка оказывается обратно пропорциональной ускорению свободного падения, поэтому высота прыжка на Астероиде будет равна

$$h = h_0 \frac{g_3}{g} \approx 0,65 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (14)$$

1.6.2 Ускорение свободного падения на высоте h рассчитывается по формуле

$$g = G \frac{M}{(r+h)^2} = G \frac{M}{r^2} \frac{r^2}{(r+h)^2} = g_0 \frac{r^2}{(r+h)^2}, \quad (15)$$

здесь r - радиус планеты, g_0 - ускорение свободного падения на поверхности планеты. Таким образом, относительное уменьшение ускорения свободного падения равно

$$\varepsilon = \frac{g_0 - g}{g_0} = 1 - \left(\frac{r}{r+h} \right)^2 \approx 12\%. \quad (16)$$

1.6.3 Уточнить найденную приближенно высоту прыжка можно, заменив в формуле (13) ускорение свободного падения на поверхности на среднее значение ускорения на поверхности и на найденной максимальной высоте, то есть положить

$$\bar{h} = \frac{v_0^2}{2 \frac{g_0 + g_h}{2}} = \frac{v_0^2}{2g_0} \frac{2}{1 + \frac{g_h}{g_0}} = h \frac{2}{1 + \left(\frac{r}{r+h} \right)^2} = h \frac{2}{2 - \varepsilon} \approx 1,06h \approx 0,69 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (17)$$

Таким образом, учет зависимости ускорения свободного падения от высоты приводит к увеличению высоты примерно на 6%, что составляет примерно 40 м.

Небольшое дополнение.*

Пункт 1.6 может быть решен точно при использовании закона сохранения энергии и формулы для энергии гравитационного взаимодействия тел

$$\frac{mv_0^2}{2} = G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r+h}. \quad (18)$$

Решить данное уравнение не сложно:

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} &= G \frac{M}{r} - G \frac{M}{r+h} = G \frac{M}{r} \left(1 - \frac{r}{r+h} \right) = g_0 r \frac{h}{r+h} \\ \frac{v_0^2}{2g_0} r + \frac{v_0^2}{2g_0} h &= rh \quad \Rightarrow \quad \bar{h} = \frac{v_0^2}{2g_0} \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{2g_0 r}} = \frac{h}{1 - \frac{h}{r}} \approx 0,695 \cdot 10^3 \text{ м.} \end{aligned} \quad (19)$$