

Условие

Задание 2. Реология

Реология – наука о деформации, пластичности, вязкости трения в различных средах. Описание реальных процессов изменения формы тел – очень сложная физическая задача. Однако хорошее качественное и количественное описание некоторых процессов деформации можно провести, используя так называемые реологические модели.

В этой задаче мы предлагаем Вам рассмотреть некоторые модели, используемые для описания одномерных деформаций. Все эти модели состоят из трех типов основных элементов.



Рис. 1

Каждый элемент можно наглядно представить, как длинную трубку, внутри которой находится некоторое простое устройство, соединенное с тонким выдвижным стержнем, который может двигаться в обоих направлениях (рис. 1). Массами всех элементов и их устройств можно пренебречь. Во всех случаях деформацией и скоростью деформации элемента будем называть смещение и скорость конца выдвижного стержня.

Вам предстоит рассмотреть некоторые реологические модели, состоящие из соединенных различным образом элементов, и качественно построить графики зависимостей величины и скорости деформации. Качественное изображение зависимостей отражает лишь суть процесса и не требует указания масштаба и точного построения прямых и кривых. Однако обязательным является указание точек, в которых ход процесса существенно изменяется, а также точек пересечения с осями и асимптот (предельных значений).

Вам также необходимо объяснить ваши построения.

Рассмотрим используемые в данной задаче «основные элементы». Рядом с изображением элемента приводится его условное обозначение на схемах.

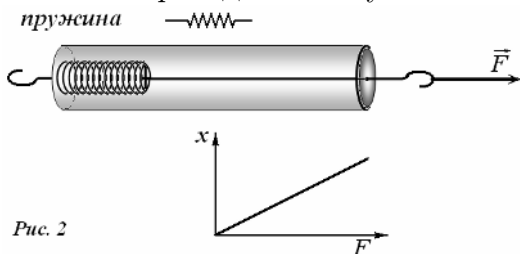


Рис. 2

1. «Пружина».

Внутри трубки находится упругая легкая пружина (рис. 2). Так как масса пружины пренебрежимо мала, то при приложении силы F такая пружина практически мгновенно растягивается (деформируется) на определенную величину

$$x = \frac{1}{k} F \quad (1)$$

где k - жесткость пружины. При изменении внешней силы пружина мгновенно изменяет свою длину в соответствии с формулой (1).

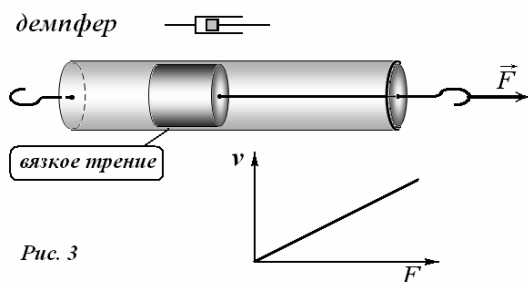


Рис. 3

2. «Демпфер».

Внутри цилиндра находится вязкая жидкость. Выдвижной стержень соединен с легким поршнем внутри цилиндра (рис.3). Между стенками цилиндра и поршнем имеется небольшой зазор, через который жидкость может перетекать с одной стороны поршня на другую. На поршень действует сила вязкого трения, которая пропорциональна скорости его движения. Поэтому **скорость** деформации оказывается пропорциональной приложенной силе

$$v = \frac{1}{a} F \quad (2)$$

где постоянную a назовем сопротивлением демпфера. Так как массой поршня пренебрегаем, то при изменении внешней силы скорость мгновенно принимает значение, соответствующее формуле (2).

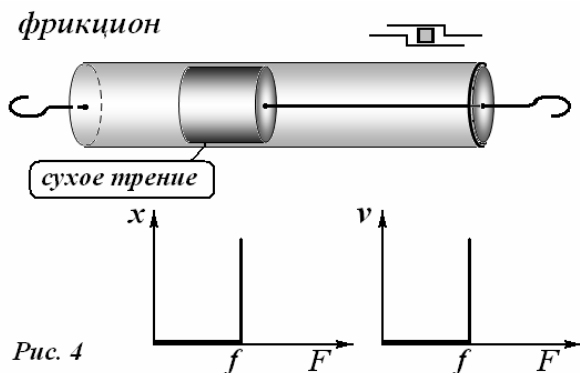
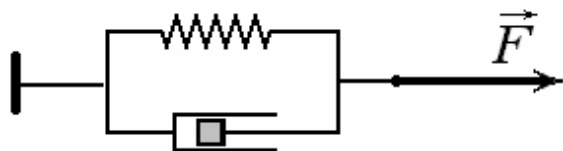


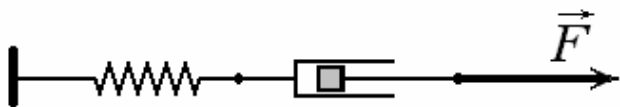
Рис. 4

3. «Фрикцион» Выдвижной стержень внутри цилиндра соединен с поршнем, плотно прилегающим к стенкам цилиндра. На поршень со стороны цилиндра действует сила сухого трения. Пока внешняя сила не превышает определенного значения $F < f$ (f - максимальная сила трения покоя), поршень не движется. Если же внешняя сила превышает значение f , то сила трения остается постоянной и равной f . Так как и в этом случае, массой поршня пренебрегаем, то при $F > f$ фрикцион бесконечно быстро деформируется, что отражено на графиках рис. 4.



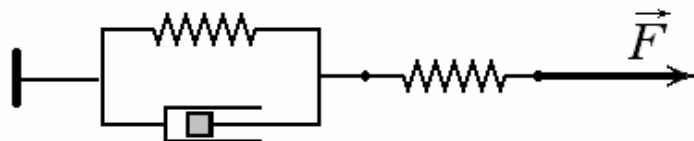
Часть 1. Демпфер и пружина. 1.1 Демпфер и пружина соединены параллельно и изначально не деформированы. К этой системе прикладывают постоянную силу F .

1.1.1 Найдите зависимость скорости деформации от ее величины $v(x)$ (запишите формулу). Постройте график этой зависимости. **1.1.2** Качественно изобразите зависимости величины деформации от времени $x(t)$ и скорости деформации от времени $v(t)$.

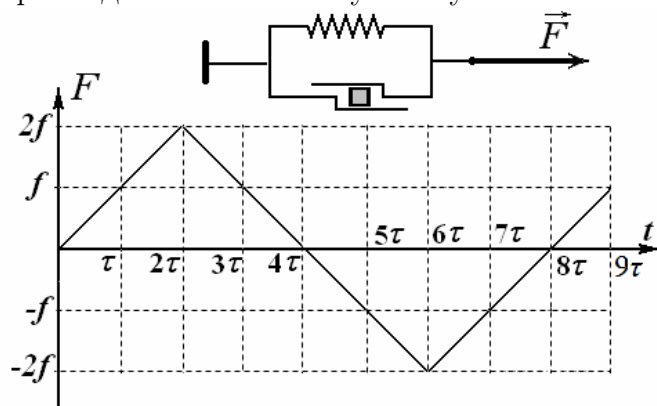


1.2 Демпфер и пружина соединены последовательно и изначально не деформированы. К этой системе прикладывают постоянную силу F .

1.2.1 Найдите зависимость деформации системы от времени $x(t)$ (запишите формулу). Постройте график этой зависимости. **1.2.2** постройте график зависимости скорости деформации от времени $v(t)$.



1.3 Рассмотрите смешанное соединение двух пружин и демпфера. К этой системе также прикладывают постоянную силу F .



Качественно изобразите зависимости графики зависимостей $v(x)$, $x(t)$ и $v(t)$.

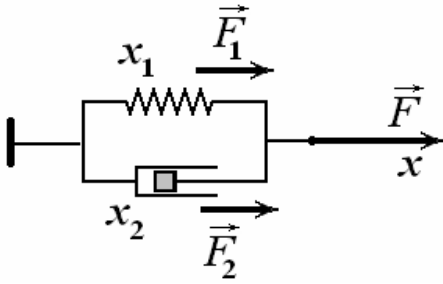
Часть 2. Фрикцион и пружина. 2.1 Рассмотрите параллельное соединение фрикциона и пружины. В этом случае к системе прикладывается сила, которая сначала равномерно увеличивается от нуля до $2f$ за время 2τ , затем она равномерно уменьшается до значения $-2f$ (т.е. сила будет сжимать систему) за время 4τ , а затем снова равномерно увеличивается до значения f .

Постройте качественный график зависимости величины деформации от времени $x(t)$. Постройте также график зависимости величины деформации от величины приложенной силы $x(F)$.



Решение

Задание 2. Реология



Часть 1. Демпфер и пружина.

1.1 Деформации элементов одинаковы, а внешняя сила уравнивается силой упругости пружины и демпфера:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x \\ F_1 + F_2 = F \end{cases} \quad (1)$$

Используя формулы (1) и (2) из условия задачи составим уравнение:

$$kx + av = F, \quad (2)$$

Из которого получаем выражение для скорости

$$v = \frac{F - kx}{a}. \quad (3)$$

Зависимость скорости деформации от величины деформации представляет собой отрезок прямой, пересекающей ось v в точке $\frac{F}{a}$ и ось x в точке $\frac{F}{k}$.

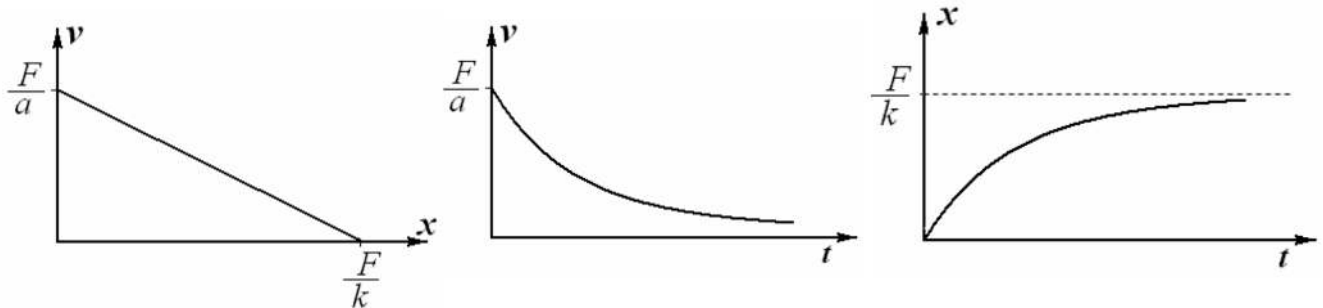
В начальный момент времени деформация отсутствует, $x = 0$, поэтому скорость деформации будет максимальна и равна:

$$v_0 = \frac{F}{a}. \quad (4)$$

Затем, по мере увеличения деформации, скорость деформации будет становиться все меньше и меньше (асимптотически приближаться к нулю).

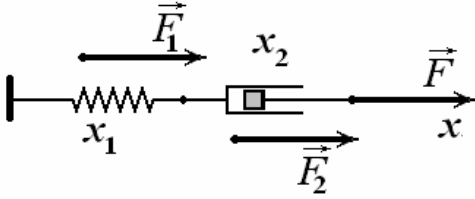
Величина деформации x вначале достаточно быстро увеличивается, а затем, т.к. скорость уменьшается, постепенно приближается своему равновесному значению:

$$x_P = \frac{F}{k}. \quad (5)$$

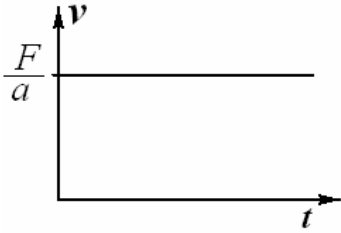
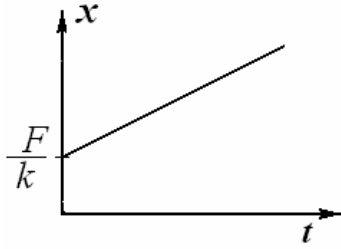


1.2 При последовательном соединении величина деформации равна сумме деформаций каждого элемента, а сила F оказывается приложенной и к пружине и к демпферу (элементы невесомые).

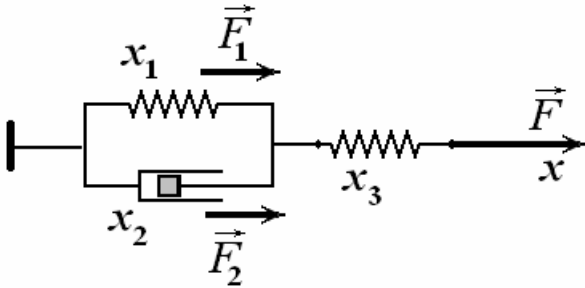
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ F_1 = F_2 = F \end{cases} \quad (6)$$



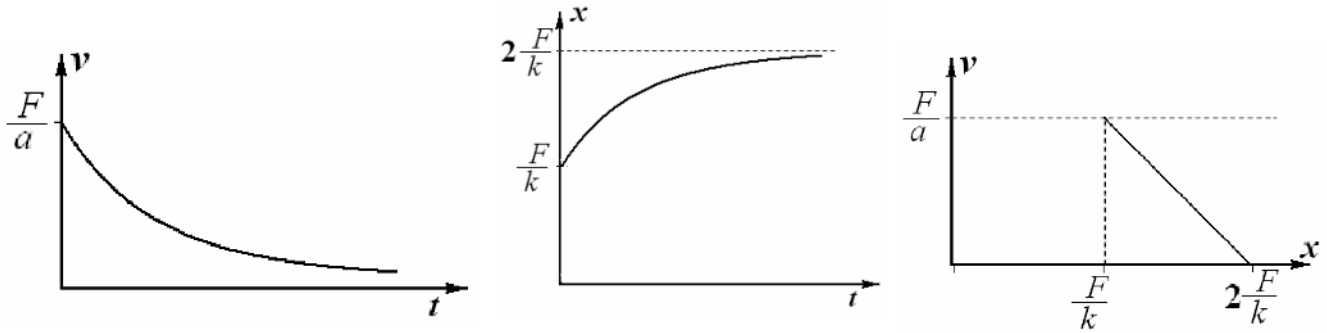
Следовательно, скорость деформации мгновенно достигнет значения (4) и не будет изменяться с течением времени. Величина деформации также мгновенно достигнет значения (5), а затем будет линейно увеличиваться.



1.3 Смешанное соединение приведет к тому, что в начальный момент времени произойдет мгновенная деформация на величину (5). Затем деформация будет повторять таковую, описанную в первом пункте задачи. Т.е. скорость в начальный момент будет равна (4), а затем будет уменьшаться. А деформация будет увеличиваться и приближаться к значению $2F/k$. На графике зависимости $v(x)$ также произойдет смещение на величину F/k .



$2F/k$. На графике зависимости $v(x)$ также произойдет смещение на величину F/k .



Часть 2. Фрикцион и пружина.

При параллельном соединении фрикциона и пружины сила F уравнивается силой упругости пружины и силой трения возникающей внутри фрикциона. До тех пор пока значение силы не превысит f , деформация будет отсутствовать (отрезок 1 на графике $x(F)$). Когда сила трения внутри фрикциона превращается в силу трения скольжения (т.е. остается постоянной и равной f) между силами выполняется соотношение:

$$F = kx + f \quad (7)$$

Т.е. зависимость деформации от величины силы представляет собой линейную зависимость:

$$x = \frac{1}{k}F - \frac{f}{k} \quad (8)$$

Максимальная деформация составит величину:

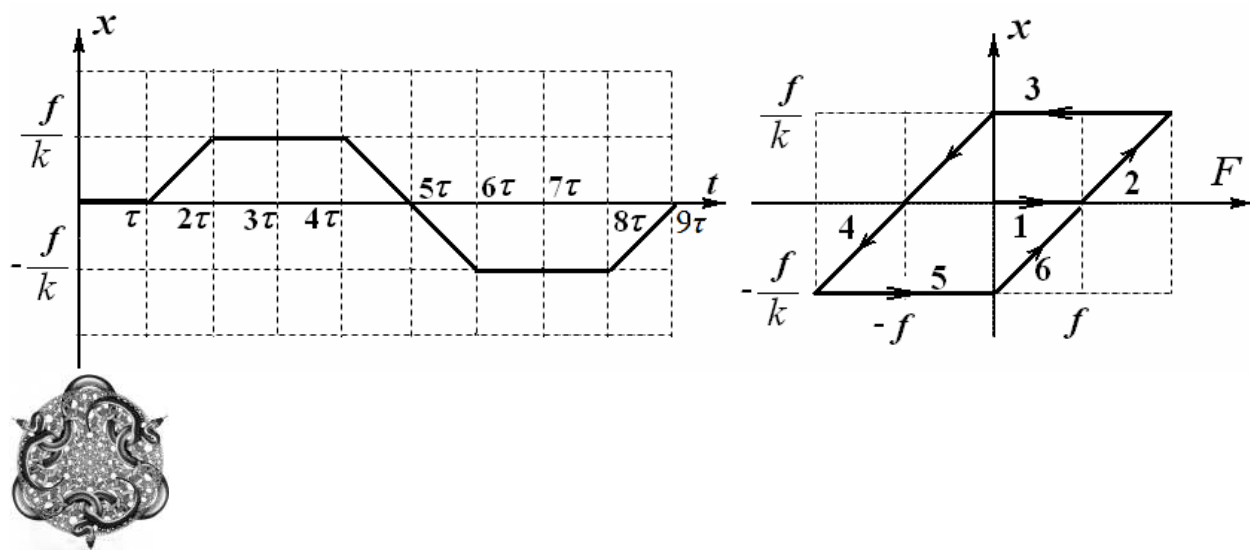
$$x_M = \frac{f}{k} \quad (9).$$

Этот процесс изображен отрезком 2 на графике.

Как только сила F начнет уменьшаться, сила трения в фрикционе снова станет силой трения покоя и деформация прекратится. По мере уменьшения приложенной силы, сила трения покоя будет уменьшаться и достигнет нулевого значения при $F = f$. Далее сила трения покоя поменяет направление на противоположное и начнет возрастать, однако деформация не начнет до тех пор пока сила трения не достигнет значения f , а это произойдет только в тот момент, когда внешняя сила F станет равной нулю. Только тогда пружина начнет сжиматься. Поэтому при уменьшении силы от $2f$ до нуля график зависимости деформации от силы будет представлять горизонтальный отрезок 3.

Далее внешняя сила начнет сжимать систему. Сила трения в фрикционе будет являться силой трения скольжения и будет препятствовать сжатию с силой f . При максимальной сжимающей силе $F = -2f$ деформация достигнет максимального значения, модуль которой равен (7). Этот процесс изображен отрезком 4.

Затем возникнет аналогичная ситуация, и деформация будет оставаться неизменной до тех пор, пока модуль внешней силы не станет равным нулю, после чего деформация опять начнет линейно увеличиваться. Последние процессы изображаются отрезками 5 и 6 соответственно.



¹, «» Если Вам не удалось доказать справедливость формулы тонкой линзы то используйте ее как очевидный факт при выполнении последующих пунктов задачи.