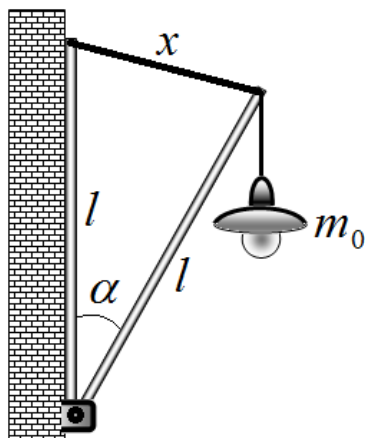


Фонарь

Условие

Задача 10-1 «Фонарь»



Молодой, но талантливый физик Федя (он же Дядя Федор) летом гостил в деревне Простоквашино. Хозяин дома кот Матроскин поручил Феде как-нибудь оригинально подвесить старинный фонарь на стене дома. Основная идея конструкции появилась быстро: надо соединить две одинаковых трубки шарнирно, одну прикрепить к стене дома, верхние концы трубок связать с помощью чего-нибудь красивого! Тут Федя вспомнил, что его японский друг подарил ему недавно легкий, хорошо растягивающийся резиновый жгут, который можно использовать для крепления подвижной трубки. Матроскин конструкцию одобрил, особенно ему понравилось, что фонарь сможет слегка покачиваться под действием ветра, дождя, и птичек, который его могут облюбовать. Правда, он выразил сомнение в прочности жгута! Федя с помощью своего верного друга Шарика приступил к конструкторской проработке проекта. Прежде всего, он взвесил фонарь, его масса оказалась равной $m_0 = 7,0$ кг; измерил длину жгута в нерастянутом состоянии, она оказалась равной $x_0 = 20$ см. После этого он подвесил вертикально фонарь на жгут, при этом жгут растянулся до длины $x_1 = 70$ см. Из эстетических соображений Федя решил использовать легкие алюминиевые трубки длиной $l = 70$ см. При этом, как прикинул Федя, трубки и жгут образуют треугольник близкий к правильному.

Часть 1.

«Не коллайдер строим!» - решил Федя, поэтому принял ускорение свободного падения равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, для проведения оценочных расчетов Федя решил пренебречь массой трубок и начальной длиной жгута, т.е. решил, что $x_1 \gg x_0$, поэтому $x_0 \approx 0$.

После этого Федя быстро записал условие равновесия подвижной трубки и... с удивлением обнаружил, что равновесие возможно только при выполнении условия

$$mg = kl, \quad (1)$$

где k - жесткость резинового жгута (в справедливости закона Гука для этого жгута Федор не сомневался!)

1.1 Запишите уравнение, выражающее условие равновесия конструкции. 1.2 Получите и Вы условие (1), проверьте его выполнения при заданных параметрах установки. 1.3 Найдите, все-таки, возможные значения угла α^* , при которых трубка будет находиться в равновесии (в рамках использованной Федей упрощенной модели). Постройте график зависимости угла

α , под которым будет располагаться трубка, от массы подвешенного к ее концу груза (для $0 < m < 20 \text{ кг}$).

Как и Феде, Вам может понадобиться тригонометрическая формула

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Часть 2.

Слегка удрученный первой неудачей, Федя решил рассмотреть задачу точнее. После недолгих размышлений он пришел к следующим выводам: уточнять значения ускорения свободного падения смысла нет (все равно сокращается), учет массы трубки также ничего принципиально не изменяет (при необходимости можно включить в массу фонаря), а вот учесть начальную длину резинового жгута необходимо! То есть, считать, что $x_0 = 20 \text{ см}$.

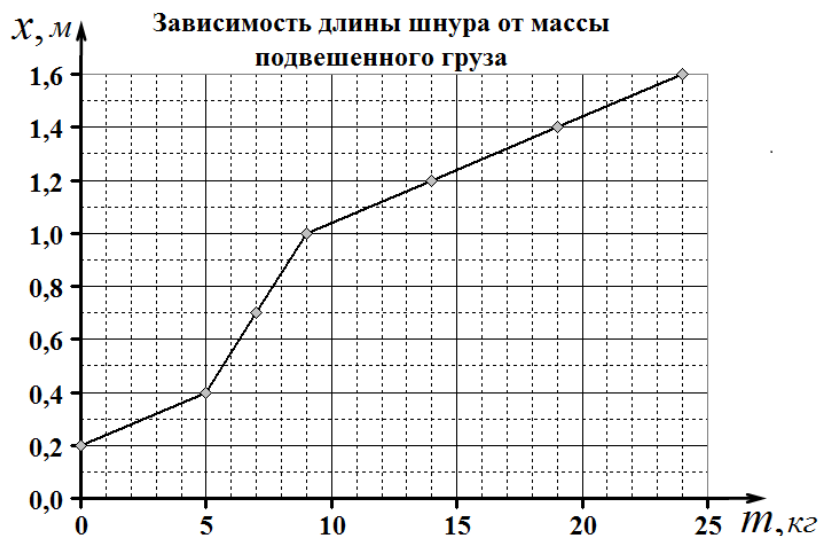
Федор записал условие равновесия в этом уточненном варианте и с удовлетворением отметил, что, во-первых, оно имеет разумные решения, во-вторых, их не сложно найти. Кроме того, Федя решил, что вместо угла отклонения α удобней в качестве параметра, характеризующего положение трубки использовать длину растянутого резинового жгута x .

2.1 Запишите условие равновесия подвижной трубки в данном случае. 2.2 Найдите длину жгута, при которой фонарь может находиться в равновесии. 2.3 Рассчитайте максимальную массу тела, которое можно подвесить к трубке, чтобы она еще не опрокинулась (т.е. трубка не опустилась в нижнее вертикальное положение). 2.3 Найдите зависимость потенциальной энергии системы от длины растянутого шнура. Укажите, какие положения равновесия являются устойчивыми.

Часть 3.

После столь серьезной теоретической проработки ответственного задания Дядя Федор с помощью Шарика приступил к практической реализации проекта. Указанную конструкцию оказалось построить даже проще, чем ее теоретическую модель.

Будучи уверен, что все расчеты верны и не сомневаясь в справедливости законов физики, на торжественное открытие фонаря Дядя Федор созвал всех своих друзей. Закрепил японский резиновый жгут, подвесил фонарь и медленно отпустил его. Подвижная трубка легко отошла от стенки и остановилась, правда угол ее отклонения оказался заметно меньше рассчитанного. Но тут, на фонарь сел изрядно располневший галчонок – фонарь начал медленно опускаться, трубка прошла горизонтальное положение и ... остановилась. Разозленный кот Матроскин согнал галчонок – фонарь начал медленно подниматься, но ... не вернулся в исходное положение!



После проверки и длительного анализа своих теоретических измышлений Федя понял, что что-то здесь не так! Снял фонарь, снял драгоценный жгут и решил измерить, как изменяется длина жгута, если к нему подвешивать грузы различной массы. В итоге кропотливой работы Федор получил зависимость, показанную на рисунке. «Оказывается, японцы ничего не знают о законе Гука!» - объяснил свою неудачу дядя Федор.

Получив теперь уже все необходимые ему экспериментальные данные, Федя опять засел за расчеты, тем более, что они оказались совсем простыми.

В итоге он сумел объяснить проведенный эксперимент с галчонком. После этого он закрепил жгут на прежнее место своей конструкции и провел экспериментальную проверку проведенных расчетов, они подтвердили (естественно, в пределах погрешности измерений) справедливость построенной теории!

3.1 Постройте график зависимости длины растянутого жгута от массы подвешенного к подвижной трубке груза (на месте фонаря), если массу этого груза сначала увеличивать от 0 до 10 кг, а затем медленно уменьшать от 10 кг до нуля.

Все-таки, законы физики оказались верными, жаль только, что конструкцию подвеса фонаря пришлось менять, ведь к галчонку могут еще и его друзья прилетать!

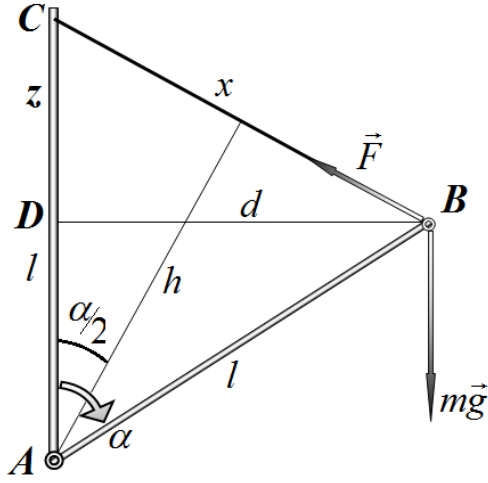
Решение

Задача 10-1 «Фонарь»

Часть 1.

Условие равновесия удобно записать, приравнявая модули моментов силы тяжести¹ $m\vec{g}$ и силы упругости жгута $\vec{F}$, относительно шарнирного крепления

$$mgl \sin \alpha = Fl \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$



Длина растянутого жгута равна

$$x = 2l \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

При выполнении закона Гука и пренебрежимо малой начальной длине жгута сила упругости выражается формулой

$$F = kx = 2kl \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнения равновесия имеет вид

$$mgl \sin \alpha = 2kl \sin \frac{\alpha}{2} \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Если воспользоваться тригонометрической формулой и сократить $\sin \alpha$, то получается приведенное условие

$$mg = kl. \quad (5)$$

Для определения коэффициента жесткости следует воспользоваться результатами измерений длины жгута при известной массе подвешенного груза.

$$m_0 g = kx_1 \Rightarrow k = \frac{m_0 g}{x_1}. \quad (6)$$

Подстановка этого значения в условие (5) дает

$$m_0 g = \frac{m_0 g}{x_1} l \Rightarrow l = x_1 \quad (?) \quad (7)$$

что случайно выполняется в данном случае! Однако уравнение (4) имеет корни, (которые оказались потерянными при сокращении)

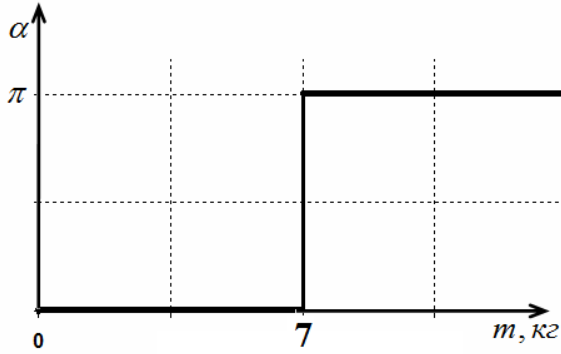
$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^* = 0, \quad \alpha^* = \pi. \quad (8)$$

При $mg < kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = 0$, при $mg > kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = \pi$. Критическое значение массы, при котором произойдет опрокидывание находится из исходных данных

$$m^* g = kl = \frac{m_0 g}{x_1} l \Rightarrow$$

$$m^* = m_0 \frac{l}{x_1} = 7,0 \text{ кг} \quad (9)$$

Требуемый график имеет вид, показанный на рисунке.



— ¹ Здесь мы записываем условия равновесия для произвольной массы подвешенного груза
Часть 2.

Уравнение равновесия в данном случае будет иметь вид

$$mg \cdot l \sin \alpha = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

Используя приведенную в условии тригонометрическую формулу, получим

$$mg \cdot 2l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2},$$

Наконец, учтем, что $2l \sin \frac{\alpha}{2} = x$, тогда окончательно получим уравнение равновесия

$$mgx \cos \frac{\alpha}{2} = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Это уравнение имеет корень, соответствующий условию

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi \quad (x = 2l). \quad (12)$$

Второй корень находится из уравнения

$$mgx = kl(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{1 - \frac{mg}{kl}} = \frac{x_0}{1 - \frac{m(x_1 - x_0)}{m_0 l}}, \quad (11)$$

При выводе использовано выражение для жесткости жгута

$$m_0 g = k(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m_0 g}{x_1 - x_0}. \quad (12)$$

Для анализа устойчивости найденных точек равновесия можно рассмотреть зависимость потенциальной энергии системы от длины шнура. Потенциальная энергия системы включает: - потенциальную энергию растянутого жгута $U_1 = \frac{k(x-x_0)^2}{2}$; - потенциальную энергию подвешенного груза (относительно верхней точки крепления C) $U_2 = -mgz$. Из теоремы Пифагора для треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ следует

$$\begin{cases} d^2 = x^2 - z^2 \\ d^2 = l^2 - (l - z)^2 = 2lz - z^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{2l} \quad (13)$$

Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии приобретает вид

$$U = \frac{k(x - x_0)^2}{2} - mg\frac{x^2}{2l} = \frac{k}{2} \left((x - x_0)^2 - \frac{mg}{kl}x^2 \right) = \frac{k}{2} \left(\left(1 - \frac{mg}{kl}\right)x^2 - 2xx_0 + x_0^2 \right). \quad (14)$$

График этой зависимости есть парабола, с вершиной в точке

$$x = \frac{x_0}{1 - \frac{mg}{kl}},$$

что соответствует второму корню (11) уравнения равновесия. При $mg < kl$ ветви этой параболы направлены вверх, поэтому положение равновесия (11) является устойчивым, при больших массах $mg > kl$ это положение становится неустойчивым, устойчивым становится решение $x = 2l$. Максимальное значение массы можно найти, положив в формуле (11) $x = 2l$:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{1 - \frac{m(x_1 - x_0)}{m_0 l}} = 2l \quad \Rightarrow \quad 2l - 2\frac{m(x_1 - x_0)}{m_0} = x_0 \quad \Rightarrow \\ m = m_0 \frac{2l - x_0}{2(x_1 - x_0)} \approx 8,4\kappa 2 \end{aligned} \quad (15)$$

Часть 3.

Запишем еще раз условие равновесия трубки:

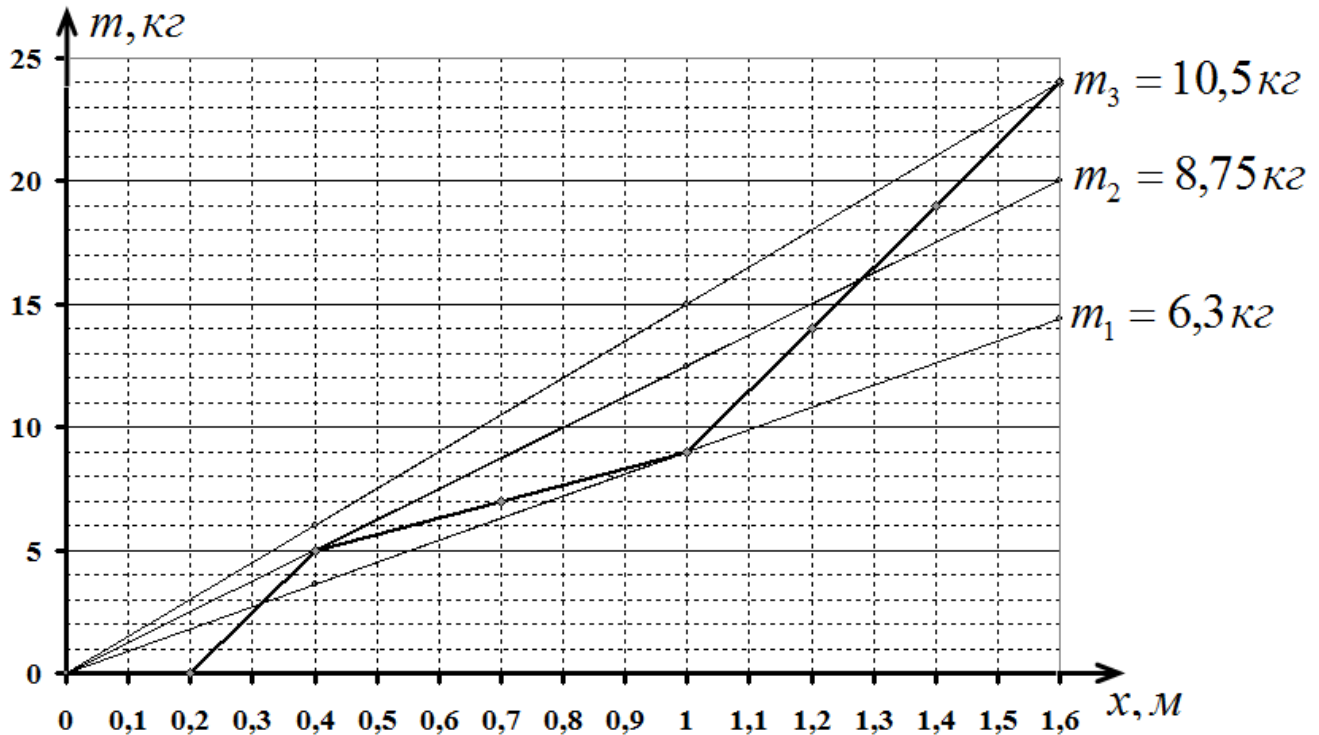
$$mgl \sin \alpha = Fl \cos \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad mg \cdot 2l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = Fl \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (16)$$

После сокращения на косинус половинного угла (не забывая о потерянном при этом корне), получим уравнение для определения x

$$\frac{mg}{l}x = F(x). \quad (16)$$

Это уравнение можно решить графически (можно и аналитически), для этого необходимо построить график зависимости величины $\frac{1}{g}F(x)$, для этого достаточно «перевернуть» график зависимости длины шнура от массы подвешенного груза, приведенный в условии задачи. Затем на этом графике следует провести семейство прямых $f(x) = \frac{m}{l}x$ и найти точку их пересечения. Такие построения показаны на рисунке.

(масса груза подвешенного к вертикальному жгуту)



При массах груза, подвешенного кронштейну, меньших $m_1 = 6,3 \text{ кг}$ имеется одно положение равновесия. Длина шнура в этом случае линейно изменяется от нуля до 0,4 м. При массах больших $m_2 = 8,75 \text{ кг}$ также имеется одно положение равновесия. В этом интервале длина шнура линейно изменяется от 1 м до 24 м (когда масса груза достигает $m_3 = 10,5 \text{ кг}$).

В диапазоне масс от $m_1 = 6,3 \text{ кг}$ до $m_2 = 8,75 \text{ кг}$ есть три положения равновесия, центральное из которых является неустойчивым. Поэтому в этой области система обладает бистабильностью. Какое из возможных положений равновесия установится зависит от предыдущих состояний, следовательно, при увеличении нагрузки и последующем ее уменьшении будет наблюдаться петля гистерезиса (см. рис).

