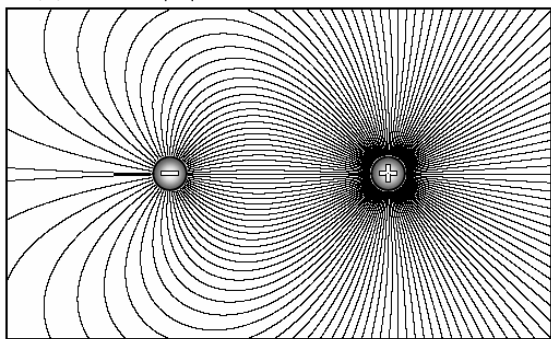


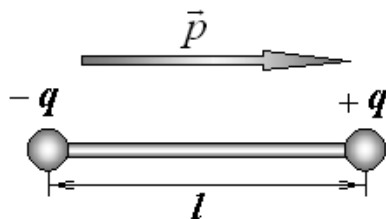
Условие

Задача 2. До какой же степени..?



Простейшей моделью заряженного тела является точечный заряд. Помимо этой модели в прикладной электростатике широко используются и другие модели заряженных тел (диполи, квадруполь и т.д.), получившие название мультиполей.

Диполи электрически нейтральны, поскольку их суммарный заряд равен нулю. Но, несмотря на это, между ними возникают силы притяжения, рассмотрению которых и посвящена эта задача.

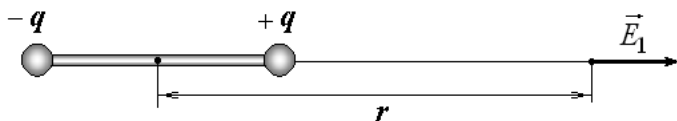


Электрический диполь, представляет собой совокупность двух равных по величине разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Дипольным моментом p системы называется произведение заряда $+q$ на расстояние l между зарядами

$$p = ql.$$

Вектор $\vec{p}$ дипольного момента направлен от отрицательного заряда к положительному.

1. Найдите напряженность электростатического поля E_1 , создаваемого диполем на больших расстояниях r ($r \gg l$) вдоль линии, соединяющей заряды (см. рис.).

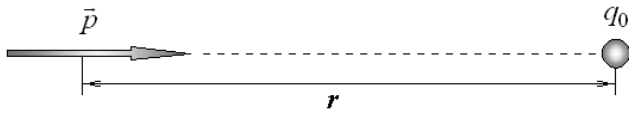


Выразите E_1 через дипольный момент системы p и расстояние r до центра диполя.

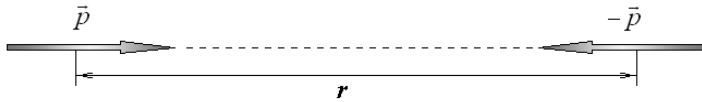
*Примечание: при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливо приближенное равенство

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x.$$

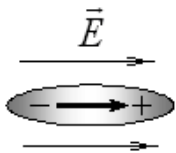
2. Пробный заряд q_0 находится в вакууме на расстоянии r от точечного заряда $-q_1$. Найдите силу притяжения между зарядами. Запишите полученную формулу в виде $F_1 \sim \frac{1}{r^n}$ и найдите значение n в данном пункте задачи.



3. Пробный заряд q_0 находится в вакууме на расстоянии r ($r \gg l$) от центра диполя с моментом p (см. рис.). Найдите силу $\vec{F}_2$ взаимодействия пробного заряда с диполем. Запишите полученную формулу в виде $F_2 \sim \frac{1}{r^n}$ и найдите значение n в данном пункте задачи.



4. Найдите силу взаимодействия $\vec{F}_3$ двух одинаковых диполей с дипольным моментом p каждый, расположенных на расстоянии r ($r \gg l$) друг от друга вдоль прямой, соединяющей заряды, так как показано на рисунке (см. рис.). Запишите полученную формулу в виде $F_3 \sim \frac{1}{r^n}$ и найдите значение n в данном пункте задачи.

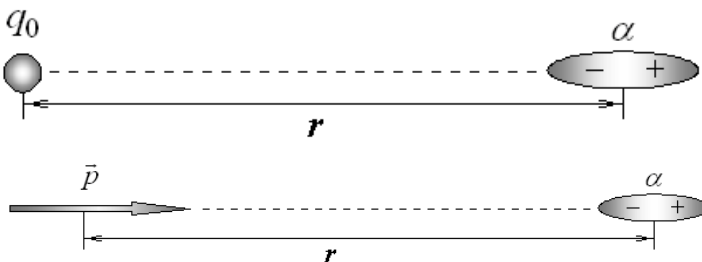


5. Эксперименты показывают, что под действием внешнего электрического поля напряженностью $\vec{E}$ диэлектрики (отдельные молекулы) поляризуются и приобретают наведенный (индуцированный) дипольный момент

$$p = \alpha \epsilon_0 E,$$

ориентированный по полю (см. рис.). Коэффициент α , имеющий в данном случае размерность объема, называется поляризуемостью молекулы диэлектрика.

Точечный заряд q_0 находится на расстоянии r от молекулы диэлектрика с поляризуемостью α . Найдите силу $\vec{F}_4$ взаимодействия заряда с молекулой. Запишите полученную формулу в виде $F_4 \sim \frac{1}{r^n}$ и найдите значение n в данном пункте задачи.

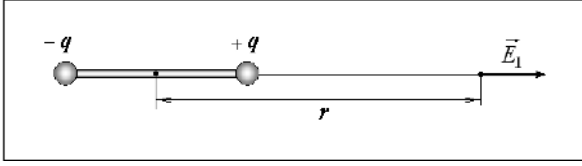


6. Диполь с моментом p находится на расстоянии r от молекулы с поляризуемостью α (см. рис.). Найдите силу $\vec{F}_5$ взаимодействия заряда с молекулой. Запишите полученную формулу в виде $F_5 \sim \frac{1}{r^n}$ и найдите значение n в данном пункте задачи.

Решение

Задача 10. 2. До какой же степени..?

1. Напряженность электростатического поля E_1 , создаваемого диполем на больших расстояниях r ($r \gg l$) вдоль линии, соединяющей заряды, найдем по принципу суперпозиции полей. Для этого следует построить векторную сумму напряженностей, создаваемых в точке наблюдения положительным $\vec{E}_+$ и отрицательным $\vec{E}_-$ зарядами диполя



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

Поскольку векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ на этой прямой противоположны друг другу, то модуль их суммы

$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right). \quad (1)$$

Используя формулы приближенных вычислений $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$ при малых x , получим

$$\frac{1}{\left(r \mp \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \mp \frac{l}{2r}\right)^2} = \begin{cases} \alpha = -2 \\ x = \frac{l}{2r} \end{cases} = \frac{1}{r^2} \left(1 \pm \frac{l}{r} \right). \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{l}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{l}{r} \right) \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для дипольного момента $p = ql$ системы, окончательно получаем

$$E_1(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (4)$$

С учетом направления вектора дипольного момента $\vec{p}$ системы (4) можно переписать в векторном виде (в решении не требуется)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Таким образом, как следует из (4), модуль напряженности поля E_1 , создаваемого диполем вдоль его оси на больших расстояниях ($r \gg l$) убывает обратно пропорционально кубу расстояния r до диполя

$$E_1 \sim \frac{1}{r^3}. \quad (5)$$

Заметим, что выражение (4) можно получить и традиционным способом, без использования приведенного в условии приближенного равенства. Действительно, приняв обозначения

$$\begin{aligned} r_1 &= r - \frac{l}{2} \\ r_2 &= r + \frac{l}{2} \end{aligned}$$

перепишем (1) в виде

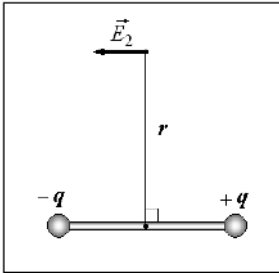
$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 r_1^2}.$$

С учетом того, что $r_2^2 - r_1^2 = 2rl$, и в рамках принятых приближений можно считать, что $r_2^2 \cdot r_1^2 \approx r^4$, получим

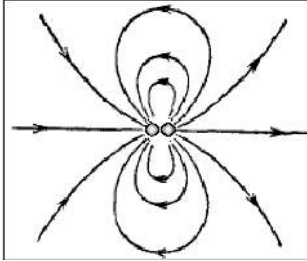
$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2rl}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}.$$

Интересно, что зависимость, подобная (5), сохраняется и при нахождении напряженности поля E_2 «перпендикулярно» диполю, т.е. на прямой, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр. В этом случае изменяется только безразмерный коэффициент

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$

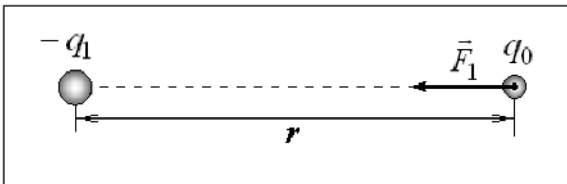


Общая картина силовых линий диполя на большом расстоянии от него дана на рисунке справа. Расположение положительного и отрицательного зарядов диполя соответствует расположению, приведенному в условии задачи.



2. Согласно закону Кулона пробный заряд q_0 (он является положительным точечным зарядом) будет притягиваться к точечному заряду $-q_1$ в вакууме с силой

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_1}{r^2}. \quad (6)$$



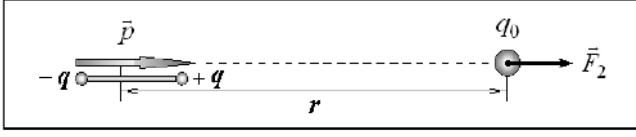
Согласно третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой F_1 заряд $-q_1$ будет притягиваться к заряду q_0 .

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_1 \sim \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 2. \quad (7)$$



3. При взаимном расположении диполя $\vec{p}$ и пробного заряда q_0 как на рисунке взаимодействие будет носить характер отталкивания, поскольку одноименный (положительный) заряд диполя находится ближе к пробному (положительному) заряду, чем разноименный (отрицательный). В таком случае силы отталкивания преобладают над силами притяжения, что приводит к возникновению результирующей силы $\vec{F}_2$, направленной вправо (см. рис). Следовательно, в данном случае диполь будет отталкивать пробный заряд вдоль своей оси с силой

$$F_2 = q_0 E_1(r) = \{(4)\} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (8)$$

Заметим, что при изменении ориентации диполя ($-\vec{p}$), характер взаимодействия диполя с пробным зарядом изменится с отталкивания на притяжение. Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

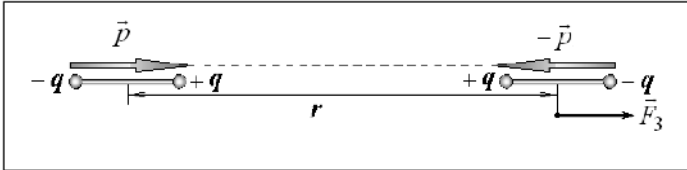
$$F_2 \sim \frac{1}{r^3}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 3. \quad (9)$$

4. Для определенности будем считать, что левый диполь $\vec{p}$ создает напряженность поля в пространстве, которое действует на правый диполь $-\vec{p}$.

Поскольку одноименные заряды диполей находятся на меньших



расстояниях, чем разноименные, то согласно закону Кулона сила отталкивания в системе будет больше силы притяжения.

Это приведет к возникновению результирующей силы $\vec{F}_3$ отталкивания между диполями, направленной вправо (см. рис.).

Используя (4), для рассматриваемой системы можем записать

$$F_3 = q \left(E_1(r - \frac{l}{2}) - E_1(r + \frac{l}{2}) \right) = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r - \frac{l}{2})^3} - \frac{1}{(r + \frac{l}{2})^3} \right). \quad (10)$$

С помощью формулы приближенного вычисления $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$ (при $x \rightarrow 0$) в данном случае находим

$$\frac{1}{(r \mp \frac{l}{2})^3} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{(1 \mp \frac{l}{2r})^3} = \begin{cases} \alpha = -3 \\ x = \frac{l}{2r} \end{cases} = \frac{1}{r^3} \left(1 \pm \frac{3l}{2r} \right).$$

Соответственно, разность в выражении (10) примет вид

$$\frac{1}{(r - \frac{l}{2})^3} - \frac{1}{(r + \frac{l}{2})^3} \approx \frac{3l}{r^4}.$$

С учетом того, что $p = ql$, окончательно получим

$$F_3 = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^4}. \quad (11)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_3 \sim \frac{1}{r^4}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 4. \quad (12)$$

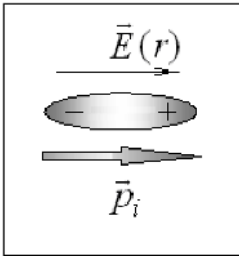
Заметим, что выражение (11) проще получить, используя производную от (4) по расстоянию r , поскольку искомая сила F_3 вычисляется как

$$F_3 = -p \frac{\partial E}{\partial r},$$

однако подобный подход выходит за рамки действующей школьной программы.

5. Будем считать, что напряженность $E(r)$ электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_0 в области нахождения молекулы, меняется незначительно (в силу малости размеров молекулы) и равна

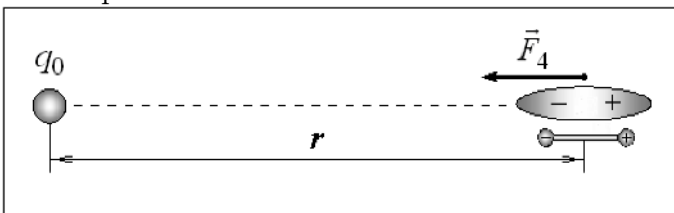
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r^2}.$$



Тогда индуцированный дипольный момент молекулы примет значение

$$p_i = \alpha\epsilon_0 E(r) = \alpha\epsilon_0 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r^2} = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \frac{q_0}{r^2}.$$

В пункте 3 задачи мы вычислили силу взаимодействия диполя и точечного заряда, правда в рассматриваемом случае индуцированный (наведенный) дипольный момент $\vec{p}_i$ имеет противоположное направление («от заряда»), что приведет к возникновению в данной системе силы притяжения.



Используя (8) и третий закон Ньютона, найдем силу притяжения вынужденно поляризованной молекулы к точечному заряду

$$F_4 = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i}{r^3} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \frac{q_0}{r^2} = \frac{\alpha q_0^2}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^5} \quad (13)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

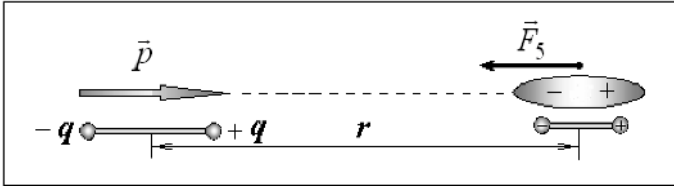
$$F_4 \sim \frac{1}{r^5}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 5. \quad (14)$$

6. Будем считать, что напряженность электростатического поля, создаваемого диполем $\vec{p}$ в области нахождения молекулы, меняется незначительно. Тогда согласно (4) можем записать

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$



Соответственно, индуцированный дипольный момент молекулы в этом случае примет значение

$$p_i = \alpha\epsilon_0 \cdot \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (15)$$

В пункте 4 задачи мы вычислили силу отталкивания между диполями, ориентированными «навстречу» друг другу. В данном случае диполи ориентированы в одном направлении, поскольку наведенный дипольный момент всегда ориентирован «по полю». Это обстоятельство приведет к возникновению силы притяжения между диполями в рассматриваемой системе.

Считая взаимодействие диполей по формуле (11), получим величину силы притяжения между ними для рассматриваемого случая

$$F_5 = \frac{3p \cdot p_i}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3\alpha p^2}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^7}. \quad (16)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_5 \sim \frac{1}{r^7}.$$

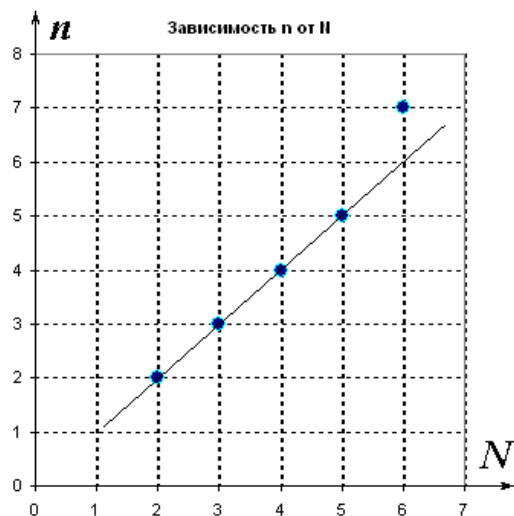
Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 7. \quad (17)$$

Интересно, что в пунктах 3 и 4 задачи имеет место сила отталкивания между объектами, а в пунктах 5 и 6, связанных с индуцированным дипольным моментом, всегда имеет место сила притяжения.

Это связано с тем, что направление напряженности внешнего электрического поля однозначно определяет направление возникающего дипольного момента $\vec{p}$ поляризуемого объекта — он всегда ориентирован «по силовой линии» внешнего (индуцирующего) поля.

В завершение задачи на рисунке справа приведена достаточно забавная (но верная!) зависимость показателя степени n в выражении для силы взаимодействия F_i от номера N пункта задачи.



Как говорится, комментарии излишни, но так и не понятно, почему последняя точка не ложится «на прямую». Было бы так красиво...