

Федя – путешественник

Условие

Задача 9-1. «Федя – путешественник»

Молодой, но талантливый физик Федя (он же Дядя Федор) летом гостил в деревне Простоквашино. Однажды он решил отправиться к своему другу в соседнюю деревню Кефирино, находящуюся на расстоянии $S = 5,0$ км. Кот Матроскин, хотел знать, как идет путешествие. Но у кота не было мобильного телефона, потому, «что котам мобильники не положены!» Талантливый физик Федя легко разрешил возникшую проблему: он предложил привлечь к путешествию пса Шарика, который должен постоянно бегать между Простоквашино и Федей, передавая сообщения о ходе путешествия. Матроскин принял предложение.

Часть 1. План путешествия.

Как настоящий физик Федя решил построить теоретическую модель путешествия. Он решил двигаться не спеша, с постоянной скоростью $V = 3,0 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. Добравшись до своего друга, Федя будет гостить у него целый день. Шарик должен бегать с постоянной по модулю скоростью ровно в три раза превышающей скорость Федей $u = 3v$.

По плану, Шарик должен выбежать из дома через время $\tau_0 = 5,0$ мин после Федей, догнав его, он должен тут же повернуть обратно и вернуться домой, передав сообщение, снова бежать за Федей, догнать его, вернуться домой и так далее... После того, как Шарик предаст последнее сообщение о том, что Федя успешно добрался до деревни Кефирино, он получит свое вознаграждение и останется дома. Временем встреч следовало пренебречь.

1.1 Рассчитайте скорость движения Федей в «метрах в минуту» и дальше пользуйтесь этими единицами измерения (метрах и минутах). 1.2 За какое время Федя должен дойти до конечной цели? 1.3 Запишите в символьном виде закон движения Федей $x_0(t)$ (зависимость расстояния от бабушкиного дома x_0 от времени t). Постройте график планируемого закона движения.

Для этого используйте бланк №1 Сначала подумайте, а потом стройте!

1.4 Найдите (получите формулу в общем виде, а затем рассчитайте численные значения) в какие моменты времени τ_k Шарик будет возвращаться домой. 1.5 Найдите (получите формулу в общем виде, а затем рассчитайте численные значения) в какие моменты времени t_k и в каких точках x_k Шарик должен встречаться с Федей. 1.6 Рассчитайте какой путь L должен пробежать Шарик. 1.7 На бланке №1 постройте график закона движения Шарика.

Часть 2. Путешествие.

В этой части задачи рекомендуем использовать промежуточные численные расчеты.

Построенный график движения Федя взял с собой и выдал Шарiku (видно и он относится к талантливым физикам в своем виде). Первые две встречи Шарика с Федей прошли строго по графику. Однако к третьей встрече Шарик опоздал на время

$\Delta t_1 = 15$ мин. Федя понял, что после возвращения домой Шарик какое-то время $\Delta \tau_1$ отдыхал в тенечке под забором.

2.1 Найдите сколько времени $\Delta \tau_1$ Шарик отдыхал возле дома.

Шарик получил законную взбучку за опоздание и категорическое указание: к следующей встрече полностью восстановить разработанный график движения, то есть четвертая встреча должна произойти в расчетное время. Видимо, Федя убежден в наличии физических знаний и математических способностей у Шарика. Временем «дружеской беседы» можно пренебречь и в этом случае.

2.2 С какой средней скоростью должен бежать Шарик, чтобы четвертая встреча произошла в расчетное время? В какой момент времени Шарик вернется домой в этот раз?

Шарик выполнил поставленную задачу – четвертая встреча произошла точно в расчетное

время! После этого он получил возможность совершить очередной круг с прежней, плановой скоростью. Шарик легко добежал до дома в Простоквашино, доложил Матроскину и побежал обратно! Каково же было его удивление, когда от догнал Федю точно на входе в деревню Кефирино, хотя по плану Федор должен был прийти в нее раньше! Шарик понял, что Федя тоже где-то немного отдохнул!

2.3 Сколько времени Δt_2 отдыхал Федя?

Распрощавшись с Федей, Шарик честно, по графику вернулся домой и получил законное вознаграждение!

2.4 Постройте на бланке №2 графики реальных законов движения Федора и Шарика. **2.5**

Рассчитайте, на сколько Шарик удлинил свой путь ΔL из-за незапланированного отдыха.

Не забудьте сдать бланк с построенными графиками!

Решение

Задача 9-1. «Федя – путешественник»

1.1 Пересчет скорости проводится традиционно

$$v = \frac{3,0 \text{ км}}{1,0 \text{ час}} = \frac{3000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = 50 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \quad (1)$$

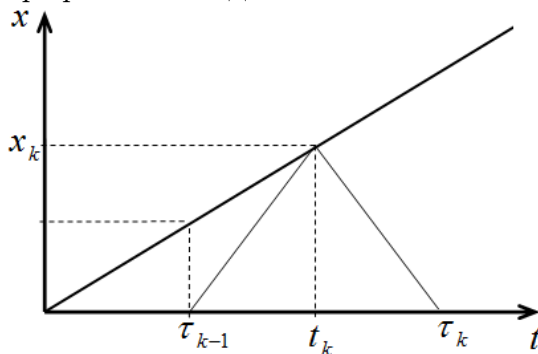
1.2 Время движения Феде

$$T = \frac{S}{v} = \frac{5000 \text{ м}}{50 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ мин.} \quad (2)$$

2.1 Сначала (в течении промежутка времени T) Федя движется равномерно, а затем остается в покое, поэтому

$$x_0(t) = \begin{cases} vt, & \text{при } t \leq T \\ S, & \text{при } t \geq T \end{cases} \quad (3)$$

График закона движения показан на рис. 2.



1.4-1.5 Изобразим схематически законы движения Феде и Шарика (рис. 1). Пусть Шарик в очередной раз вернулся домой в момент времени τ_{k-1} . Следующая встреча с Федей произойдет в момент времени t_k , в точке с координатой

$$x_k = vt_k. \quad (4)$$

Эту же координату можно выразить из закона движения Шарика на этом участке

$$x_k = u(t_k - \tau_{k-1}). \quad (5)$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$u(t_k - \tau_{k-1}) = vt_k \Rightarrow t_k = \frac{u}{u-v} \tau_{k-1}, \quad (6)$$

Очевидно, что назад Шарик будет бежать столько же времени, как и до встречи, поэтому

$$\tau_k - t_k = t_k - \tau_{k-1}.$$

Из последних соотношений находим

$$\tau_k = 2t_k - \tau_{k-1} = 2 \frac{u}{u-v} \tau_{k-1} - \tau_{k-1} = \frac{u+v}{u-v} \tau_{k-1}. \quad (7)$$

Полученное соотношение показывает, что времена возвращения Шарика домой образуют геометрическую прогрессию, которую в явном виде можно записать (с учетом $u = 3v$)

$$\tau_k = \frac{u+v}{u-v} \tau_{k-1} \Rightarrow \tau_k = \tau_0 \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^k = \tau_0 \cdot 2^k \quad (8)$$

Из формулы (6) выразим моменты встреч Шарика с Федей

$$t_k = \frac{u}{u-v} \tau_{k-1} = \frac{u}{u-v} \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^{k-1} \tau_0 = \tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k \quad (9)$$

и координаты мест встречи

$$x_k = vt_k = \frac{u}{u-v} \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^{k-1} v\tau_0 = v\tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k. \quad (10)$$

По полученным формулам легко рассчитать численные значения времен и координат (см. Таблицу 1)

Таблица 1. Планируемый график движения Шарика.

k	Возвращение к дому		Встреча с Федей	
	τ_k (мин)	x (м)	t_k (мин)	x_k (м)
0	5,0	0		
1			7,5	375
	10	0		
2			15	750
	20	0		
3			30	1500
	40	0		
4			60	3000
	80	0		
5			120 (?)	6000 (?)
			113	5000
	147	0		

Расчет показывает, что к четвертой ожидаемой встрече Федя уже дойдет до своей цели. Поэтому Шарик в четвертый раз встретит Федю в точке $x_4 = 5000$ м, в момент времени

$$t_5 = \tau_4 + \frac{S}{u} = 80 + \frac{5000}{150} = 113 \text{ мин.} \quad (11)$$

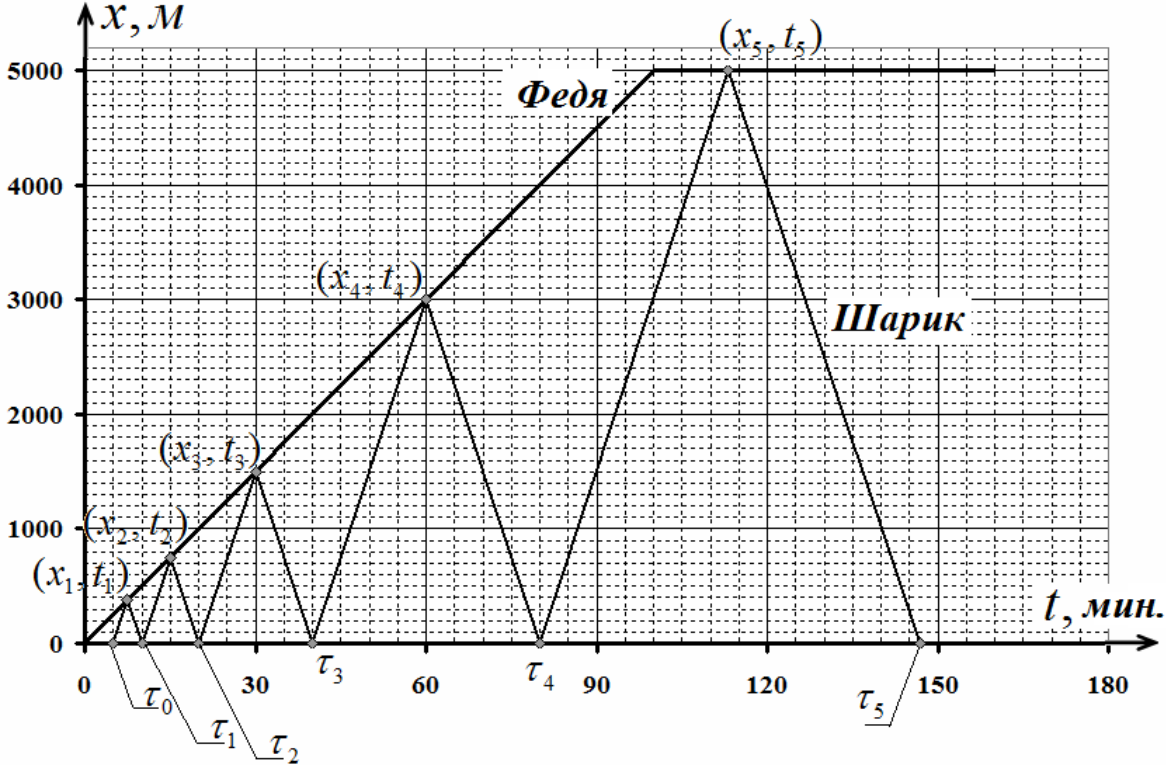
Последний раз Шарик должен вернуться домой в момент времени

$$\tau_5 = \tau_4 + 2\frac{S}{u} = 80 + 2\frac{5000}{150} = 147 \text{ мин} \quad (12)$$

1.6 Так как Шарик должен двигаться с постоянной по модулю скоростью, то путь, который он должен пробежать равен

$$L = u\tau_5 = 150 \cdot 147 = 22000 \text{ м} = 22 \text{ км} \quad (13)$$

1.7 График закона движения Шарика также показан на рис. 2.



2.1 Если Шарик отдыхал в течении промежутка $\Delta\tau_1$ и опоздал на время Δt_1 , то она бежал в течении промежутка времени $((t_3 + \Delta t_1) - (\tau_2 + \Delta\tau_1))$ и догнал Федю в точке $x = v(t_3 + \Delta t_1)$, поэтому должно выполняться соотношение

$$u((t_3 + \Delta t_1) - (\tau_2 + \Delta\tau_1)) = v(t_3 + \Delta t_1), \quad (13)$$

из которого определяем

$$\Delta\tau_1 = \frac{(u - v)}{u}(t_3 + \Delta t_1) - \tau_2 = \frac{2}{3} \cdot 45 - 20 = 10 \text{ мин.} \quad (14)$$

Так десятиминутная задержка привела к пятнадцатиминутному опозданию, взбучке, лишним километрам, да еще и к необходимости резко увеличить скорость бега!

2.2 Так как неудачная встреча Шарика с Федей произошла в точке $x'_3 = v(t_3 + \Delta t_1) = 2250$ м, в момент времени $t'_3 = 45$ мин, а следующая встреча в момент времени $t = \tau_4 = 60$ мин в точке $x_4 = 3000$ м, то средняя скорость, которую должен развить Шарик должна быть равна

$$\langle u \rangle = \frac{x'_3 + x_4}{\tau_4 - t'_3} = \frac{5250 \text{ м}}{15 \text{ мин}} = 350 \frac{\text{м}}{\text{мин}}. \quad (15)$$

Судя по документальной хронике – такая скорость Шарику доступна! Возвратится же он домой после этой бешеной гонки в момент времени

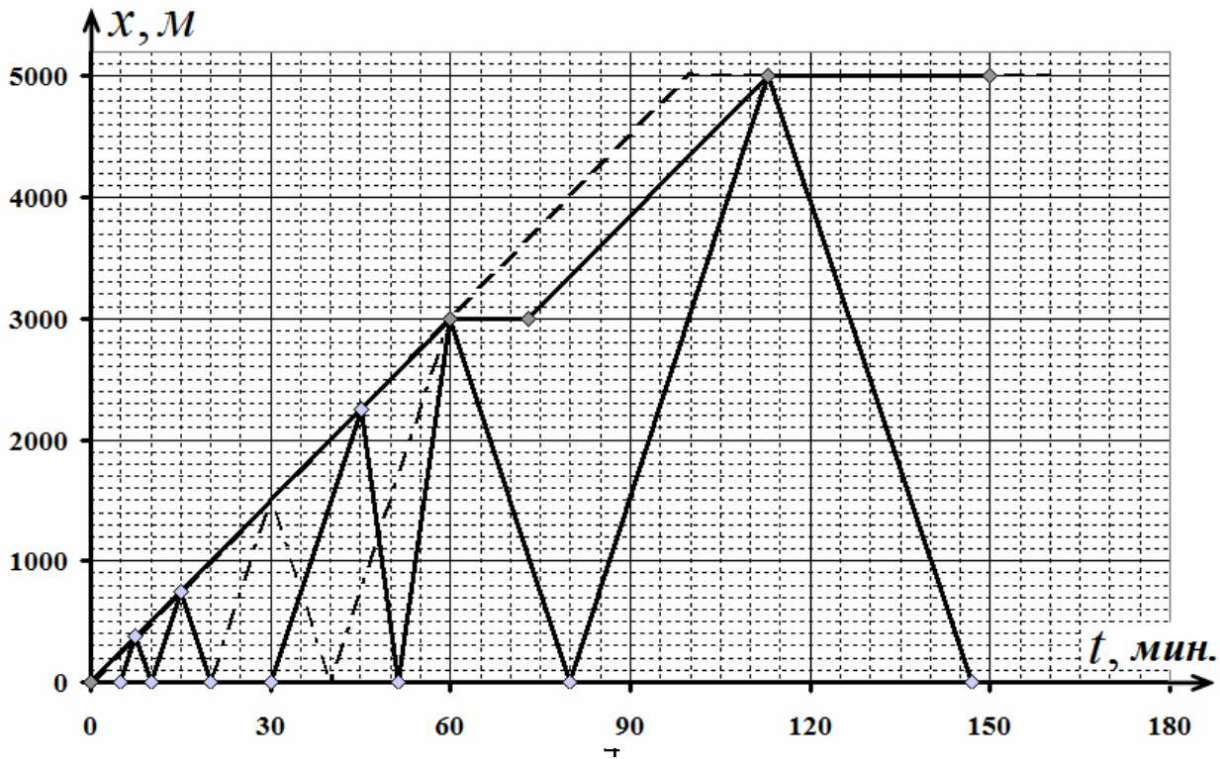
$$\tau'_3 = t'_3 + \frac{x'_3}{\langle u \rangle} = 45 + \frac{2250}{350} = 51 \text{ мин.} \quad (16)$$

Как видно, он более чем на 10 минут опоздал и на встречу с Матроскиным, что привело к еще одному воспитательному мероприятию!

2.3– 2.4 По плану Федя должен был входить в деревню в момент времени $T = 100$ мин, а в реальности он вошел в нее в момент времени $\tau_5 = 113$ мин. Следовательно, он отдыхал в течении промежутка времени

$$\Delta t_2 = \tau_5 - T = 13 \text{ мин.} \quad (17)$$

Где именно Федя устроил место отдыха сказать невозможно. Поэтому на графике закона движения этот горизонтальный участок может находиться в произвольном месте (на рис. 3 – сразу после встречи с Шариком).



2.6 Из графика видно, что удлинение пути произошло из-за того, что третья встреча произошла дальше, чем запланировано, при этом

$$\Delta L = 2(x'_3 - x_3) = 2 \cdot (2250 - 1500) = 1500 \text{ м} = 1,5 \text{ км.} \quad (18)$$

Делайте все вовремя!