

Кручение

Условие

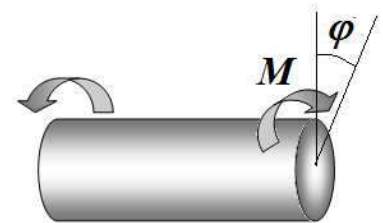
Задание 2.

«Кручение»

Приборы и оборудование: Штатив с зажимом, пластиковая трубка (гелевый стержень), металлическая спица, набор грузов (гвозди), линейка деревянная, линейка пластиковая для измерений, пластилин.

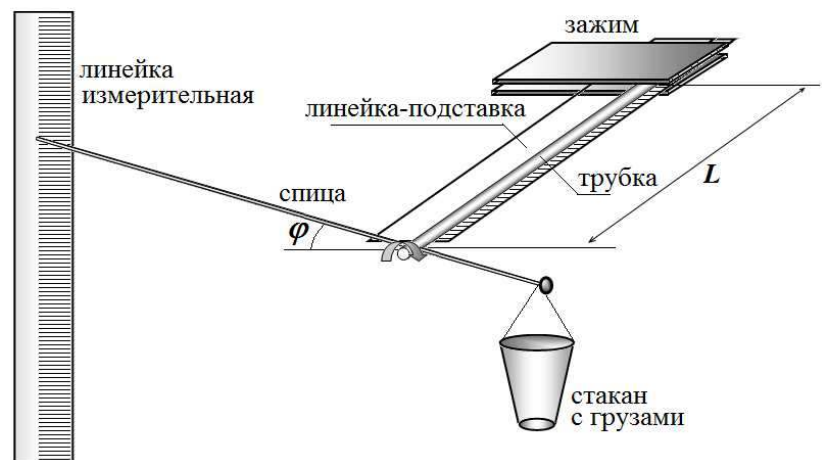
Точное значение массы одного гвоздя вам будет указано. В ходе измерений смещать спицу относительно стержня не следует!

Кручение – один из распространенных видов деформаций. В качестве меры деформации используется угол кручения φ , а характеристикой упругих сил – момент силы упругости M , который в состоянии равновесия равен моменту внешних сил, приложенных к телу. В состоянии равновесия при малых деформациях угол кручения пропорционален приложенному моменту сил (закон Гука)



$$\varphi = KM \quad (1)$$

где K некоторый коэффициент пропорциональности. В данной работе вам необходимо проверить выполнимость закона Гука для деформации кручения пластиковой трубки и исследовать зависимость коэффициента



пропорциональности K от длины деформируемой части трубки L . Для проведения исследований вам предлагается использовать следующую установку. Исследуемая трубка вместе с линейкой-подставкой (для уменьшения прогиба) зажата в лапке штатива. Конец трубки

проткнут длинной спицей, на один конец которой подвешен пластиковый стаканчик, в который можно помещать грузы – одинаковые гвозди. Второй конец спицы движется вблизи вертикальной измерительной линейки. Передвигать спицу относительно трубки стержня не следует. В качестве подставки для линейки используется кусок пластилина. При необходимости линейку можно передвигать. Измерения следует проводить, начиная с больших длин свободной части трубки L .

Часть 1. Закон Гука.

Измерения проводите при максимальной длине трубки. Углы деформации следует измерять в радианах. При малых углах тангенс угла приблизительно равен самому углу, измеренному в радианах.

1.1 Измерьте зависимость угла кручения φ от числа гвоздей, помещенных в стакан. Измерения проведите в двух направлениях: при нагрузке (постепенно увеличивая массу груза) и при разгрузке (уменьшая массу груза в стакане).

1.2 Постройте график полученной зависимости. Сделайте обоснованный вывод о применимости закона Гука в этом случае.

1.3 Объясните, почему зависимости угла кручения от приложенного момента сил полученные при нагрузке и разгрузке не совпадают.

1.4 Рассчитайте значение коэффициента пропорциональности K в формуле (1) с максимальной возможной точностью. Используйте для этого данные полученные только при «нагрузке» стержня. Укажите физический смысл этого коэффициента.

Часть 2. Коэффициент пропорциональности.

В данной части работы измерения угла кручения проводите только в одном направлении – при последовательном увеличении нагрузки на стержень. Считайте, что закон Гука выполняется!

2.1 Проведите измерения зависимости угла кручения от числа гвоздей, помещенных в стакан для разных длин L деформируемой части стержня.

2.2 На одном бланке постройте графики полученных зависимостей.

2.3 Рассчитайте значения коэффициента K для всех длин L деформируемой части стержня.

2.4 Из теории упругости следует, что коэффициент зависит от длины деформируемой части трубки по закону

$$K = CL^\alpha, \quad (2)$$

где C и α - некоторые постоянные величины. Проверьте выполнимость данной формулы в данной задаче. Определите численные значения параметра α . Ответ обоснуйте графически.

Решение

Задание 9- 2. «Кручение»

Во всех экспериментах использовались следующие значения параметров: расстояние от оси стержня до точки подвеса грузов $d = 50\text{мм}$, расстояние от оси стержня до измерительной линейки $L = 280\text{мм}$. Угол кручения рассчитывался по формуле

$$\varphi = \frac{\Delta h}{L}, \quad (1)$$

где Δh - изменение высоты подъема стрелки при нагрузке.

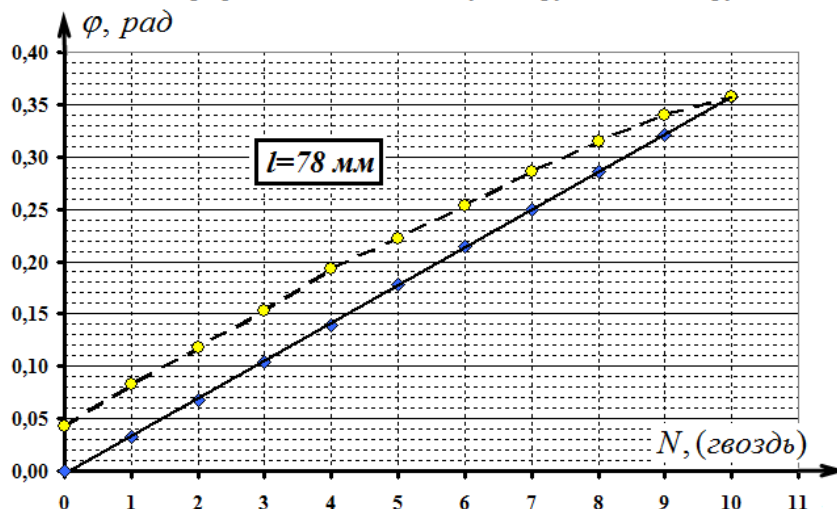
Часть 1. Закон Гука.

В Таблице 1 приведены измеренные значения Δh при максимальной длине деформируемой части стержня $l = 78\text{мм}$.

Таблица 1. Зависимость угла кручения от нагрузки (N - числа гвоздей в стакане)

N (гвоздь)	при нагрузке		при разгрузке	
	Δh , мм	φ	Δh , мм	φ
0	0	0,000	12	0,043
1	9	0,032	23	0,082
2	19	0,068	33	0,118
3	29	0,104	43	0,154
4	39	0,139	54	0,193
5	50	0,179	62	0,221
6	60	0,214	71	0,254
7	70	0,250	80	0,286
8	80	0,286	88	0,314
9	90	0,321	95	0,339
10	100	0,357	100	0,357

График 1. Зависимость угла кручения от нагрузки



На рисунке представлен график полученной зависимости.

Как видно, при нагрузке (при последовательном увеличении нагрузки) угол кручения прямо пропорционален приложенной нагрузке, то есть закон Гука выполняется.

При последовательном уменьшении нагрузки (при разгрузке) наблюдается некоторое «отставание» угла кручения от уменьшающейся нагрузки, что, очевидно связано с наличием остаточных деформаций в стержне.

Для определения коэффициента пропорциональности предпочтительнее воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК), либо провести обработку линейной зависимости графически.

В данном случае коэффициенты линейной зависимости

$$\varphi = aN + b, \quad (1)$$

рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = (3,60 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \frac{\text{радиан}}{\text{гвоздь}}.$$

$$b = (3 \pm 2) \text{ рад}$$

Так как коэффициент b оказался близким к нулю, а погрешность коэффициента a около 1%, то можно считать, что зависимость прямо пропорциональная, что еще раз подтверждает применимость закона Гука в данном случае.

Для расчета коэффициента пропорциональности K в формуле закона Гука, необходимо произвести пересчет (масса одного гвоздя $m = 10$ г)

$$\begin{cases} \varphi = aN \\ \varphi = KNmgd \end{cases} \Rightarrow K = \frac{a}{mg} = \frac{3,60 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}} \approx 7,34 \cdot 10^3 (H \cdot m)^{-1};$$

$$\Delta K = K \frac{\Delta a}{a} = 8 \cdot 10^1 (H \cdot \text{м})^{-1}$$

Окончательно, получаем значения коэффициента

$$K = (7,34 \pm 0,08) \cdot 10^3 (H \cdot \text{м})^{-1} \quad (2)$$

Смысл коэффициента – угол кручения, при единичном приложенном моменте сил.

Часть 2. Коэффициент пропорциональности.

В Таблице 2 приведены измеренные значения углов кручения стержня в зависимости от приложенной нагрузки (в гвоздях) и для различных длин деформируемой части стержня l (в мм). В предпоследней строке приведены значения коэффициента a ($a' = a \cdot 10^2$ - для экономии места), которые нами рассчитаны по МНК, хотя их значения можно снять по графику, который приведен ниже.

Таблица 2. Зависимости угла кручения от нагрузки при разных длинах деформируемой части стержня.

$l \rightarrow$	78		68		58		48		38		28		18	
N	Δh	φ	Δh	φ	Δh	φ	Δh	φ	Δh	φ	Δh	φ	Δh	φ
0	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000
1	9	0,032	9	0,032	5	0,018	6	0,021	4	0,014	3	0,011	4	0,014
2	19	0,068	17	0,061	13	0,046	11	0,039	10	0,036	6	0,021	7	0,025
3	29	0,104	26	0,093	21	0,075	19	0,068	16	0,057	11	0,039	11	0,039
4	39	0,139	36	0,129	30	0,107	26	0,093	22	0,079	16	0,057	14	0,050
5	50	0,179	47	0,168	38	0,136	34	0,121	28	0,100	19	0,068	17	0,061
6	60	0,214	57	0,204	46	0,164	41	0,146	34	0,121	23	0,082	20	0,071
7	70	0,250	66	0,236	55	0,196	49	0,175	41	0,146	28	0,100	23	0,082
8	80	0,286	76	0,271	64	0,229	57	0,204	48	0,171	33	0,118	26	0,093
9	90	0,321	85	0,304	73	0,261	66	0,236	54	0,193	38	0,136	30	0,107
10	100	0,357	94	0,336	82	0,293	77	0,275	61	0,218	42	0,150	33	0,118
$a' \rightarrow$	3,60		3,42		2,98		2,72		2,21		1,53		1,15	
$K' \rightarrow$	7,34		6,97		6,08		5,55		4,51		3,12		2,34	

Из графика видно, что при всех длинах деформируемой части стержня приближенно наблюдается прямо пропорциональная зависимость. В последней строке приведены результаты расчетов коэффициента пропорциональности K ($K' = K \cdot 10^{-3}$)

График 2. Зависимости угла кручения от нагрузки (для разных длин стержня)

Наконец, строим график зависимости коэффициента пропорциональности в формуле закона Гука от длины деформируемой части стержня. Из этого графика видно, что при небольших длинах этот коэффициент пропорционален длине свободной части стержня, отсюда можно сделать вывод, что показатель степени в формуле $K = CL^\alpha$ равен единице:

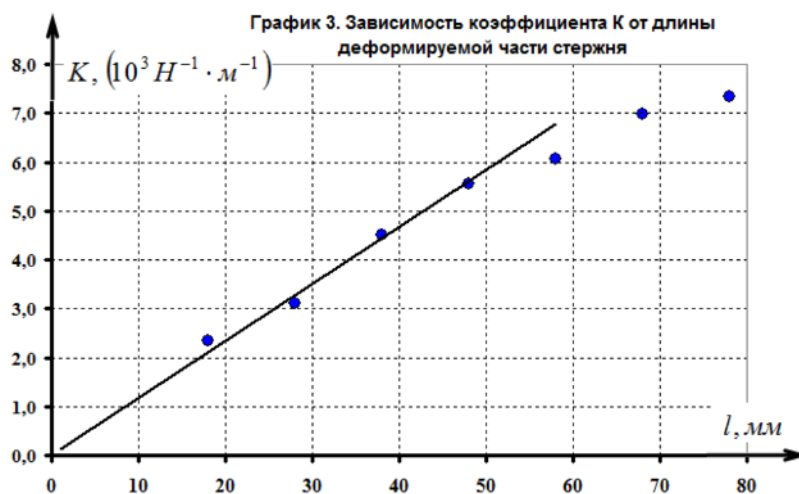
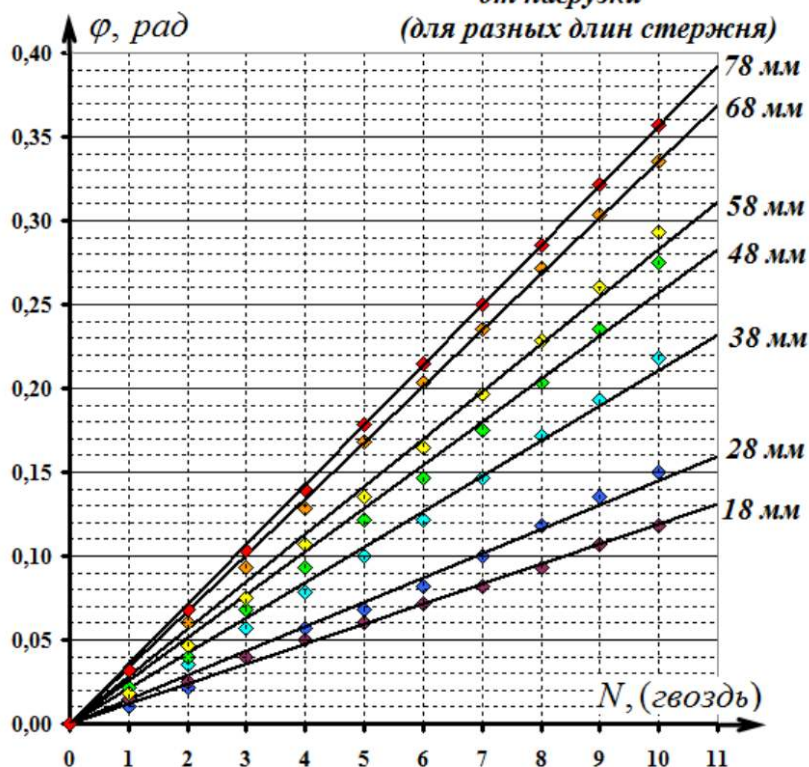


График 2. Зависимости угла кручения от нагрузки (для разных длин стержня)



Наконец, строим график зависимости коэффициента пропорциональности в формуле закона Гука от длины деформируемой части стержня. Из этого графика видно, что при небольших длинах этот коэффициент пропорционален длине свободной части стержня, отсюда можно сделать вывод, что показатель степени в формуле $K = CL^\alpha$ равен единице:

$$\alpha = 1,$$

что также следует из теории упругости. Возможно, что последние точки отклонились от

прямой, из-за того, что угол кручения перестал быть малым, и следовало бы рассчитывать угол с помощью арктангенса – но только этого еще не хватало!

¹ , , В этой части не приведены данные в табличном виде только для экономии места, все результаты представлены на графиках. От участников олимпиады не требуется такого большого числа точек – достаточно 15-20 точек, но в приведенном здесь интервале напряжений.