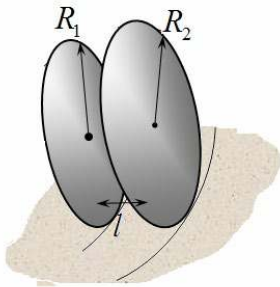


Такие разные колеса

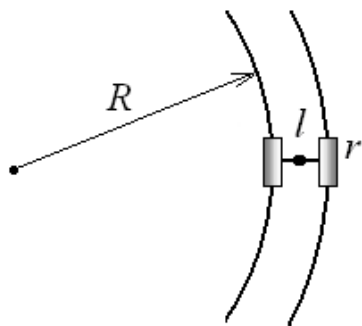
Условие

Задача 1. «Такие разные колеса»

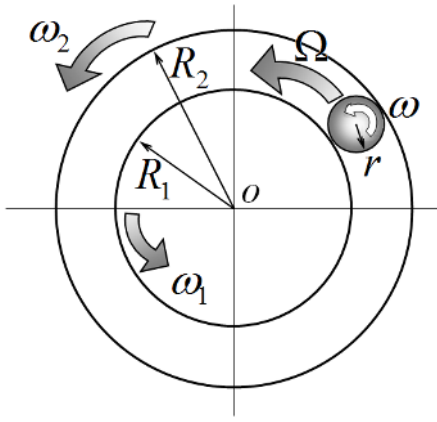
1. «Игрушка» При изготовлении колеса детской игрушки была допущена небольшая ошибка — тонкие диски, расположенные на жесткой оси длиной $l = 1,00$ см, имели разные радиусы $R_1 = 10,0$ см и $R_2 = 10,1$ см. Определите радиус R , окружности, которую опишет такое колесо, если его толкнуть без проскальзывания.



2. «Автомобиль» При повороте автомобиля по окружности радиуса $R = 20$ м его колеса вращаются с различными угловыми скоростями. Это возможно благодаря тому, что каждое колесо радиусом $r = 40$ см имеет возможность независимого вращения (например, ось разбита на две полуоси). Расстояние между колесами $l = 1,0$ м. Найдите разность $\Delta\omega$ угловых скоростей вращения колес автомобиля при повороте со скоростью $v = 36 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Движение происходит без проскальзывания.



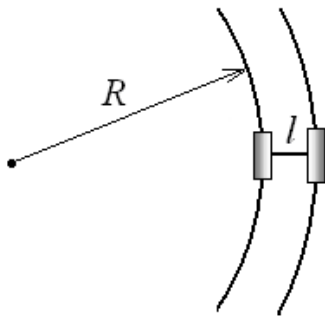
3. «Поезд» При повороте поезда используется жесткая ось, поэтому колеса имеют одинаковую угловую скорость вращения. В этом случае дискам вагонных колес придают форму усеченных конусов (см. рис.) с малым углом $\alpha = 5,0^\circ$ при вершине, что позволяет колесной паре поворачивать без проскальзывания: при повороте колеса смещаются на некоторое расстояние ΔR от центра поворота так, чтобы проскальзывание отсутствовало. Найдите смещение колесной пары поезда при повороте радиусом $R = 1,0$ км. Расстояние между колесами поезда $l = 1,5$ м, радиус колеса $r = 40$ см.



4. Рассмотрим два цилиндра радиусами R_1 и R_2 , между которыми без проскальзывания движется малый цилиндр. Определите угловую скорость ω вращения малого цилиндра вокруг собственной оси и угловую скорость Ω движения центра малого цилиндра относительно точки O . Рассчитайте численные значения скоростей ω и Ω при следующих параметрах: угловая скорость вращения внутреннего цилиндра $\omega_1 = 5,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, внешнего $\omega_2 = 7,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $R_1 = 10$ см, $R_2 = 11$ см. Рассмотрите различные случаи направления вращения внешнего и внутреннего цилиндров.

Решение

Задача 10-1 «Такие разные колеса»



1. Если угловая скорость вращения игрушки при качении без проскальзывания равна ω , то линейные скорости вращения колес различны

$$v_1 = \omega R_1$$

$$v_2 = \omega R_2.$$

Пусть радиус поворота игрушки R , тогда можем записать

$$v_1 = \Omega R$$

$$v_2 = \Omega(R + l),$$

где Ω — угловая скорость вращения игрушки вокруг центра описываемой окружности. Выражая отношения скоростей, находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R + l}{R}.$$

Из последнего равенства

$$R = \frac{R_1}{R_2 - R_1} l = 100 \text{ см} = 1,00 \text{ м}.$$

2. При повороте автомобиля справедливы равенства: для ближнего (к центру поворота) колеса

$$v = \Omega R = \omega_1 r,$$

для дальнего

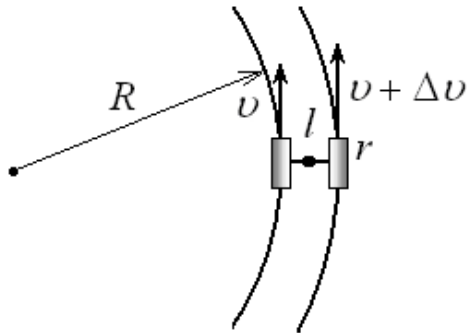
$$v + \Delta v = \Omega(R + l) = \omega_2 r,$$

где Ω — угловая скорость вращения оси колеса вокруг центра описываемой окружности. Из последнего равенства находим

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Omega(R + l)}{r} - \frac{\Omega R}{r} = \Omega \frac{l}{r} = \frac{v}{R} \cdot \frac{l}{r}.$$

Расчет дает

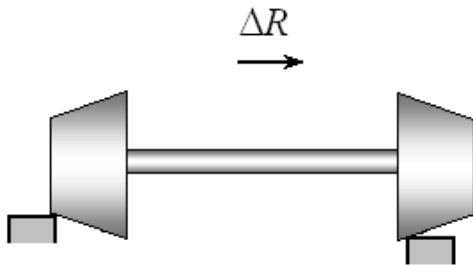
$$\Delta\omega = 1,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$



3. Поскольку угловая скорость вращения колес поезда одинакова, то, используя результаты п.1 задачи получаем

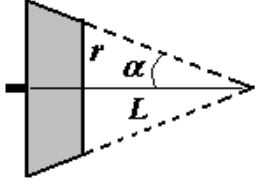
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R + l}{R} = 1 + \frac{l}{R},$$

где R_1 и R_2 различные опорные радиусы колес после смещения колесной пары (в сторону от радиуса поворота).



При смещении колес на расстояние ΔR относительно симметричного положения отношение опорных радиусов станет равным

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(L + \Delta R) \operatorname{tg} \alpha}{(L - \Delta R) \operatorname{tg} \alpha} \approx 1 + 2 \frac{\Delta R}{L},$$



где L - расстояние до вершины соответствующего конуса. В нашем случае

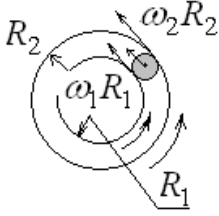
$$L = \frac{r}{\alpha}.$$

Следовательно

$$\Delta R = \frac{r}{2\alpha} \cdot \frac{l}{R} = 3,4 \text{ мм.}$$

Как следует из полученного выражения, смещение колесной пары обратно пропорционально радиусу закругления железной дороги. Следовательно, для уменьшения величины смещения (реборда ограничивает), на железной дороге делают повороты с большим радиусом.

4. Поскольку проскальзывание малого цилиндра отсутствует, то его линейные скорости в



точках касания должны быть равны соответствующим линейным скоростям цилиндров. При вращении в одном направлении имеем

$$\begin{aligned} \omega_2 R_2 &= \omega r + \Omega \frac{R_1 + R_2}{2} \\ \omega_1 R_1 &= \Omega \frac{R_1 + R_2}{2} - \omega r, \end{aligned}$$

где $r = \frac{R_2 - R_1}{2}$ - радиус малого цилиндра.

Решая систему, получаем

$$\omega = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2r} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{R_2 - R_1} = 28 \frac{\text{рад}}{с}.$$

Выражение для Ω :

$$\Omega = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{R_2 + R_1} = 6,5 \frac{\text{рад}}{с}.$$

Направление вращения в данном случае будет совпадать с направлением вращения внешнего цилиндра.

При вращении в разных направлениях в одном из уравнений системы следует поменять знак:

$$\begin{aligned}\omega_2 R_2 &= \Omega \frac{R_1 + R_2}{2} + \omega r \\ \omega_1 R_1 &= \omega r - \Omega \frac{R_1 + R_2}{2}.\end{aligned}$$

Решение в этом случае имеет вид

$$\omega = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2r} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{R_2 - R_1} = 1,4 \cdot 10^2 \frac{\text{рад}}{c}.$$

Искомая угловая скорость

$$\Omega = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{R_2 + R_1} = 1,3 \frac{\text{рад}}{c}.$$

Направление вращения в этом случае также будет совпадать с направлением вращения внешнего цилиндра.