

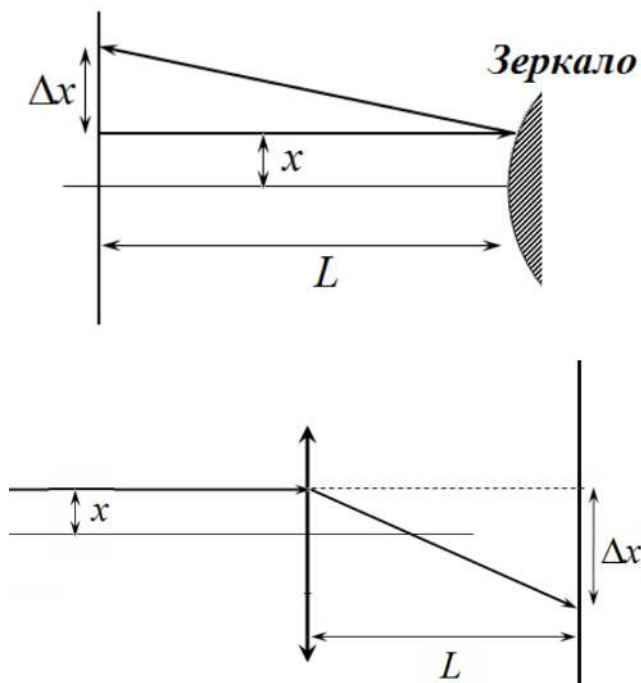
Условие

Задание 11-2. Зеркало Френеля.

Приборы и оборудование: Линзы рассеивающая и собирающая на подставке, лазер на подставке с экраном, экран, две линейки в качестве направляющих, линза Френеля рекламная, линейка измерительная, скотч.

Часть 1. Теоретическая.

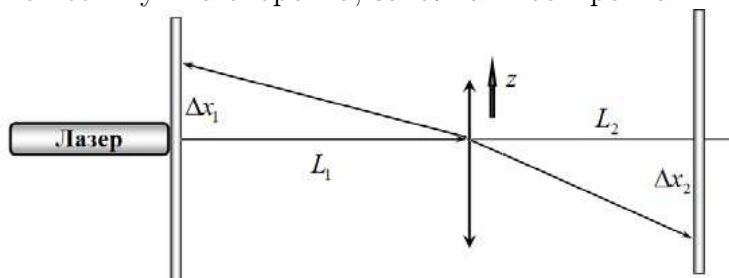
1.1 Световой луч падает на сферическое зеркало с радиусом кривизны R , параллельно его главной оптической оси, проходя на расстоянии x от нее. Определите смещение Δx отраженного луча на экране, который расположен на расстоянии L от зеркала. Рассмотрите два случая – выпуклого и вогнутого зеркала. Углы отклонения луча от оптической оси считать малыми.



1.2 Световой луч падает на тонкую линзу с фокусным расстоянием F , параллельно его главной оптической оси, проходя на расстоянии x от нее. Определите смещение Δx преломленного луча на экране, который расположен на расстоянии L от линзы. Рассмотрите два случая – выпуклого и вогнутого зеркала. Углы отклонения луча от оптической оси считать малыми. Рассмотрите случай рассеивающей и собирающей линз.

Часть 2. Линзы.

Во всем нужна сноровка, закалка... юстировка!



На столе закреплены две линейки, между ними может перемещаться подставка с линзами. Вставьте между направляющими собирающую линзу. Расположите лазер с экраном на расстоянии 45 – 50 см от линзы. Добейтесь, чтобы луч лазера попадал в центр линзы, при этом

отраженный луч должен находиться приблизительно на высоте выходящего луча и хорошо виден на экране. Вы можете видеть два отражения, самостоятельно определите, какой из них отразился от передней грани линзы. Желательно, чтобы луч, отраженный от центра линзы, после отражения попадал примерно в точку его выхода из экрана (в нем есть отверстие для луча). За линзой на расстоянии 45 – 50 см за линзой расположите экран на подставке. На нем вы должны видеть преломленный луч. Линзу можно смещать вдоль направляющих, перпендикулярно лучу, величину этого смещения z можно измерять по линейке направляющей. Положение лазера должно оставаться неизменным!

2.1 Двигая линзу вдоль направляющих, проведите измерения зависимостей смещения лучей на экранах Δx_1 и Δx_2 от величины смещения линзы. Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 Рассчитайте по полученным данным радиус кривизны R_1 передней поверхности линзы и ее фокусное расстояние F .

2.3 Переверните линзу второй поверхностью к падающему лучу и проведите измерения, описанные в п. 2.1. Рассчитайте по полученным данным радиус кривизны R_2 второй поверхности линзы и повторно фокусное расстояние линзы F .

2.4 Рассчитайте показатель преломления линзы. Не забудьте про погрешность!

Используйте формулу для фокусного расстояния линзы

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

2.4 Проведите измерения и расчеты, описанные в п. 2.3-2.4 для рассеивающей линзы.

Часть 3. Зеркало Френеля.

Рекламное зеркало Френеля представляет собой набор тонких отражающих концентрических колец. Глядя в это зеркало, вы даже можете увидеть свое искаженное отражение. Также его можно рассматривать как круговую дифракционную решетку с переменным периодом.

Вместо линз расположите между направляющими зеркало Френеля на подставке. Лазер с экраном расположите на расстоянии 10-15 см от зеркала. Тщательно съюстируйте установку – при смещении зеркала луч должен двигаться по середине зеркала, на экране должно наблюдаться размытое отраженное пятно, которое при смещении зеркала должно смещаться практически горизонтально и на уровне выходящего луча.

3.1 Проведите измерения смещения отраженного пятна (используйте его середину) Δx_1 от смещения зеркала z . Постройте график полученной зависимости. Определите «радиус кривизны» зеркала Френеля.

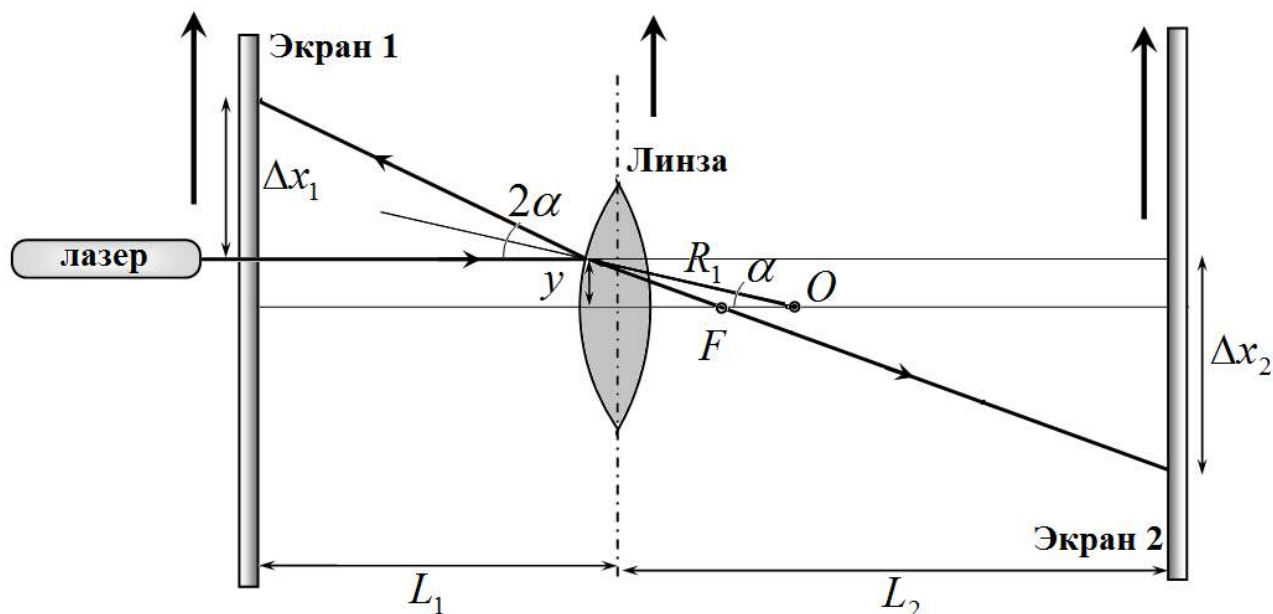
3.2 Постройте примерный график зависимости «периода решетки» от расстояния до центра линзы.

3.3 Качественно объясните принцип работы зеркала Френеля.

Решение

Задание 11-2. Зеркало Френеля.

Часть 1. Теоретическая.



На рисунке показан ход лучей, при попадании на выпуклую линзу. Жирными стрелками указаны положительные направления отсчета соответствующих смещений. Пусть расстояние от точки падения луча до главной оптической оси равно y . Обозначим угол между главной оптической осью и направлением на точку падения α . Из рисунка следует, что в приближении малых углов (когда $\text{tg } \alpha \approx \alpha$)

$$\alpha = \frac{y}{R}. \quad (1)$$

Тогда в соответствии с законом отражения света отраженный луч отклонится на угол 2α . Считая этот угол малым (то есть, полагая, что $\text{tg } 2\alpha \approx 2\alpha$) найдем, что смещение отраженного луча равно

$$\Delta x_1 = 2\alpha L_1 = \frac{2L_1}{R_1} y. \quad (2)$$

Для смещения преломленного луча, учитывая подобие треугольников, можно записать пропорцию

$$\frac{y}{F} = \frac{\Delta x_2}{L_2}, \quad (3)$$

из которой следует, что (с учетом направления отклонения)

$$\Delta x_2 = -\frac{L_2}{F} y. \quad (4)$$

Не сложно показать, что приведенные формулы справедливы и для рассеивающей линзы, только в этом случае радиус кривизны и фокусное расстояние следует считать отрицательными.

Формулы (2) и (4) дают метод измерения радиусов кривизны поверхностей линзы и ее фокусного расстояния. Так по коэффициенту наклона графика функции $\Delta x_1(y)$ можно найти

$$\Delta x_1 = \frac{2L_1}{R_1} y = K_1 y \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{2L_1}{K_1}. \quad (5)$$

Аналогично по коэффициенту наклона графика $\Delta x_2(y)$ определяется фокусное расстояние

$$\Delta x_1 = -\frac{L_2}{F}y = K_0 y \Rightarrow F = -\frac{L_2}{K_0}. \quad (6)$$

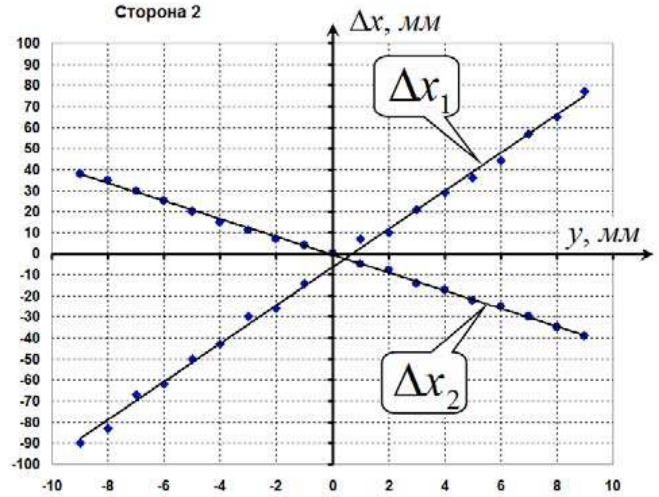
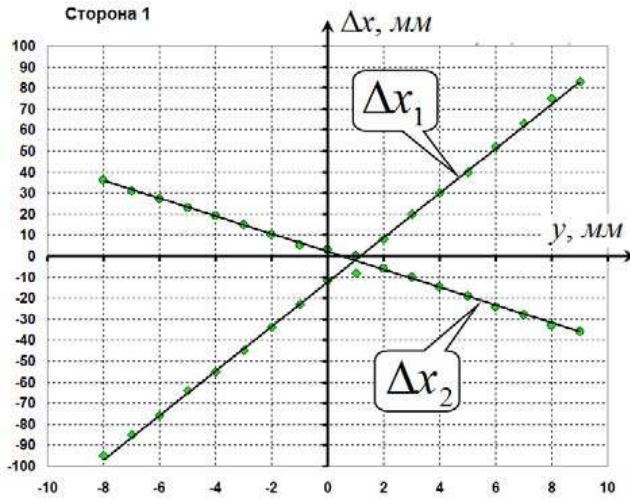
2.1 Результаты измерения смещения отраженного Δx_1 и преломленного Δx_2 лучей в зависимости от смещения линзы y для обеих сторон приведены в Таблице 1. В наших измерениях расстояния от линзы до экрана были равны

$$L_1 = (510 \pm 2) \text{ мм}; \quad L_2 = (400 \pm 2) \text{ мм};$$

Таблица 1. Собирающая линза.

Сторона 1			Сторона 2		
y , мм	Δx_1 , мм	Δx_2 , мм	y , мм	Δx_1 , мм	Δx_2 , мм
-9	-113	42			
-8	-95	36	-9	-90	38
-7	-85	31	-8	-83	35
-6	-76	27	-7	-67	30
-5	-64	23	-6	-62	25
-4	-55	19	-5	-50	20
-3	-45	15	-4	-43	15
-2	-34	10	-3	-30	11
-1	-23	5	-2	-26	7
0	-12	3	-1	-14	4
1	-8	0	0	0	0
2	8	-6	1	7	-5
3	20	-10	2	10	-8
4	30	-15	3	21	-14
5	40	-19	4	29	-17
6	52	-24	5	36	-22
7	63	-28	6	44	-25
8	75	-33	7	57	-30
9	83	-36	8	65	-35
			9	77	-39
$K =$	10,58	-4,24		9,04	-4,25
$\Delta K =$	0,17	0,08		0,24	0,07

По данным Таблицы 1 построим графики соответствующих зависимостей. В соответствии с формулами (2), (4) эти зависимости линейны (смещения от начала отсчета легко объяснимы неточностью установки начального отсчета – центр линзы не совпадает с началом отсчета). На рисунке представлены графики полученных зависимостей.



Коэффициенты наклона графиков и их погрешности, рассчитанные по МНК, приведены в нижних строках таблицы 1. По этим коэффициентам с помощью формулы (2) определяем радиусы кривизны обеих поверхностей линз:

для первой поверхности:

$$R_1 = \frac{2L_1}{K_1} = \frac{2 \cdot 51}{10,58} = 9,64 \text{ см}; \quad \Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta K_1}{K_1} = 0,15 \text{ см}$$

$$R_1 = (9,64 \pm 0,15) \text{ см}; \quad (7)$$

для второй поверхности:

$$R_2 = \frac{2L_1}{K_1} = \frac{2 \cdot 51}{9,04} = 11,28 \text{ см}; \quad \Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta K_1}{K_1} = 0,28 \text{ см}$$

$$R_1 = (11,3 \pm 0,3) \text{ см}; \quad (8)$$

Наклоны графиков зависимостей $\Delta x_2(y)$ в пределах погрешности совпадают, поэтому для определения фокусного расстояния можно использовать любое значение коэффициента наклона

$$F = -\frac{L_2}{K_0} = \frac{40}{4,25} = 9,41 \text{ см}; \quad \Delta F = F \frac{\Delta K_0}{K_0} = 0,16 \text{ см}.$$

$$F = (9,41 \pm 0,16) \text{ см}; \quad (9)$$

Отметим, что относительные погрешности измерения расстояний заметно превышают погрешности определения коэффициентов наклона, поэтому при расчете погрешностей погрешности радиусов кривизны и фокусного расстояния не учитывались.

Теперь с помощью формулы для фокусного расстояния линзы рассчитаем показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow -\frac{K_0}{L_2} = (n - 1) \left(\frac{K_1}{2L_1} + \frac{K_2}{2L_1} \right) \Rightarrow (n - 1) = -\frac{2L_1}{L_2} \frac{K_0}{K_1 + K_2}$$

$$(n - 1) = -\frac{2L_1}{L_2} \frac{K_0}{K_1 + K_2} = \frac{2 \cdot 51}{40} \frac{4,25}{10,58 + 9,64} = 0,54$$

$$\Delta n = (n - 1) \sqrt{\left(\frac{\Delta K_0}{K_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta K_1 + \Delta K_2}{K_1 + K_2}\right)^2} = 0,54 \sqrt{\left(\frac{0,07}{4,25}\right)^2 + \left(\frac{0,17 + 0,24}{10,58 + 9,64}\right)^2} = 0,02$$

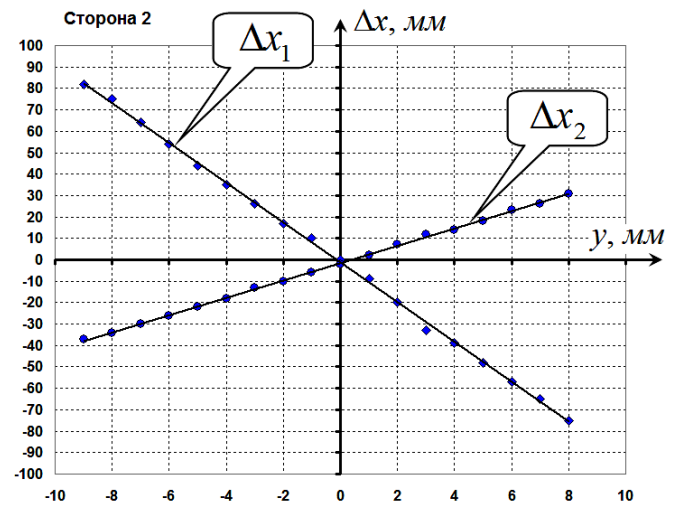
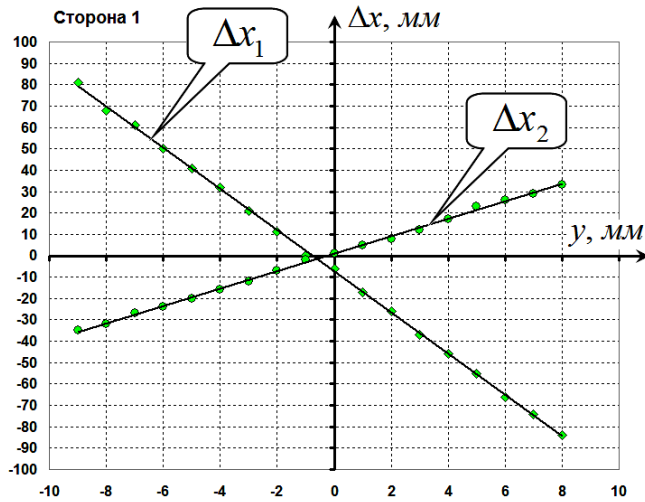
$$n = 1,54 \pm 0,02 \quad (10)$$

2.4 Измерение характеристик второй линзы проводится аналогично. Результаты измерений зависимостей отклонения лучей от смещения линзы представлены в Таблице 2.

Таблица 2. Рассеивающая линза.

сторона 1			сторона 2		
y , мм	Δx_1 , мм	Δx_2 , мм	y , мм	Δx_1 , мм	Δx_2 , мм
-9	81	-35	-9	82	-37
-8	68	-32	-8	75	-34
-7	61	-27	-7	64	-30
-6	50	-24	-6	54	-26
-5	41	-20	-5	44	-22
-4	32	-16	-4	35	-18
-3	21	-12	-3	26	-13
-2	11	-7	-2	17	-10
-1	0	-2	-1	10	-6
0	-6	1	0	0	-2
1	-17	5	1	-9	2
2	-26	8	2	-20	7
3	-37	12	3	-33	12
4	-46	17	4	-39	14
5	-55	23	5	-48	18
6	-66	26	6	-57	23
7	-74	29	7	-65	26
8	-84	33	8	-75	31
$K =$	-9,63	4,07		-9,29	4,03
$\Delta K =$	0,10	0,07		0,13	0,05

Ниже показаны графики измеренных зависимостей – обратите внимание, что наклоны графиков изменились на противоположные по сравнению с аналогичными графиками для собирающей линзы.



Расчеты также проводятся аналогично:
для первой поверхности:

$$R_1 = \frac{2L_1}{K_1} = \frac{2 \cdot 51}{-9,63} = -10,59 \text{ см}; \quad \Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta K_1}{K_1} = 0,11 \text{ см}$$

$$R_1 = (-10,59 \pm 0,11) \text{ см}; \quad (11)$$

для второй поверхности:

$$R_2 = \frac{2L_1}{K_1} = \frac{2 \cdot 51}{-9,29} = -10,97 \text{ см}; \quad \Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta K_1}{K_1} = 0,15 \text{ см}$$

$$R_1 = (-10,97 \pm 0,15) \text{ см}; \quad (12)$$

Для фокусного расстояния

$$F = -\frac{L_2}{K_0} = -\frac{40}{4,05} = -9,88 \text{ см}; \quad \Delta F = F \frac{\Delta K_0}{K_0} = 0,12 \text{ см}.$$

$$F = (-9,88 \pm 0,12) \text{ см}; \quad (13)$$

Показатель преломления:

$$(n - 1) = -\frac{2L_1}{L_2} \frac{K_0}{K_1 + K_2} = -\frac{2 \cdot 51}{40} \frac{4,05}{9,63 + 9,29} = 0,546$$

$$\Delta n = (n - 1) \sqrt{\left(\frac{\Delta K_0}{K_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta K_1 + \Delta K_2}{K_1 + K_2}\right)^2} = 0,54 \sqrt{\left(\frac{0,05}{4,05}\right)^2 + \left(\frac{0,10 + 0,13}{9,63 + 9,29}\right)^2} = 0,02$$

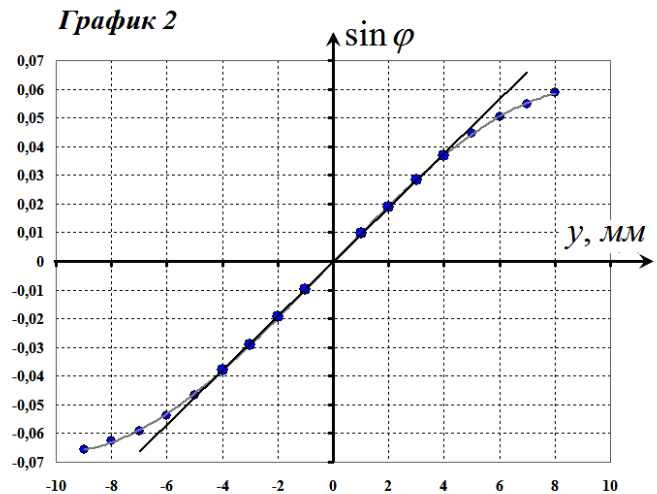
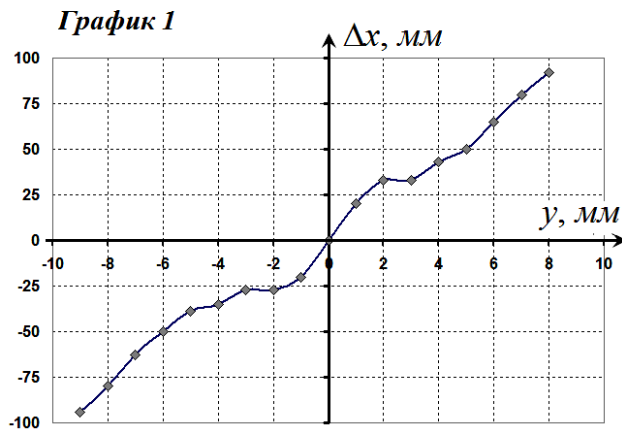
$$n = 1,55 \pm 0,02 \quad (14)$$

Часть 3. Зеркало Френеля.

Для уменьшения размытости отраженного пятна расстояние от зеркала до экрана было уменьшено до $L_1 = 10$ см. Результаты измерений зависимости отклонения луча от смещения зеркала приведены в Таблице 3. Там же даны результаты расчетов, необходимые для дальнейшей обработки результатов.

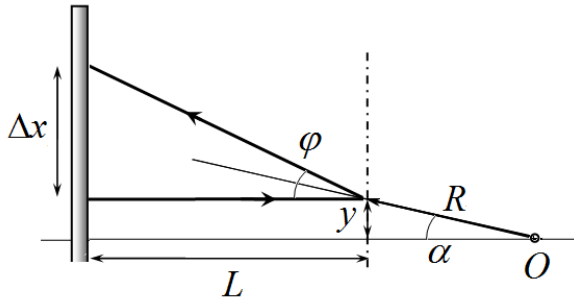
Таблица 3. Зеркало Френеля.

y , мм	Δx , мм	$\sin \varphi$	$1/y$, мм	d , мкм
-9	-94	-0,0656	-0,111	10,0
-8	-80	-0,0625	-0,125	10,5
-7	-63	-0,0592	-0,143	11,1
-6	-50	-0,0537	-0,167	12,2
-5	-39	-0,0466	-0,200	14,1
-4	-35	-0,0378	-0,250	17,3
-3	-27	-0,0290	-0,333	22,6
-2	-27	-0,0193	-0,500	33,9
-1	-20	-0,0098	-1,000	66,8
1	20	0,0098	1,000	66,8
2	33	0,0190	0,500	34,5
3	33	0,0285	0,333	23,0
4	43	0,0367	0,250	17,8
5	50	0,0447	0,200	14,6
6	65	0,0503	0,167	13,0
7	80	0,0547	0,143	12,0
8	92	0,0589	0,125	11,1



Полученная зависимость далека от линейной. Основной причиной является то, что в данном случае углы отклонения не могут считаться малыми, поэтому предпочтительнее перейти к синусам углов отклонения, которые рассчитываются по формуле

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + L^2}}. \quad (15)$$



Зависимость синуса угла отклонения от смещения зеркала показана на графике 2. На этой кривой (достаточно гладкой и монотонной) можно выделить линейный участок. Его коэффициент наклона $K \approx 0,0094$ дает возможность оценить «радиус кривизны» зеркала Френеля:

$$\sin \varphi \approx 2 \sin \alpha = \frac{2}{R}y \Rightarrow R = \frac{2}{K} = \frac{2}{0,0094} \approx 20 \text{ см} \quad (15)$$

Более интересным является вопрос об описании зеркала Френеля как дифракционной решетки с переменным шагом. Для определения периода решетки следует воспользоваться формулой (учитывая, что мы наблюдаем только первый дифракционный максимум)

$$d \sin \varphi = \lambda \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin \varphi}, \quad (16)$$

где $\lambda = 0,655 \text{ мкм}$ - длина волны излучения лазера. На графике 3 показанная рассчитанная по экспериментальным данным зависимость периода решетки от координаты. Данная

График 3

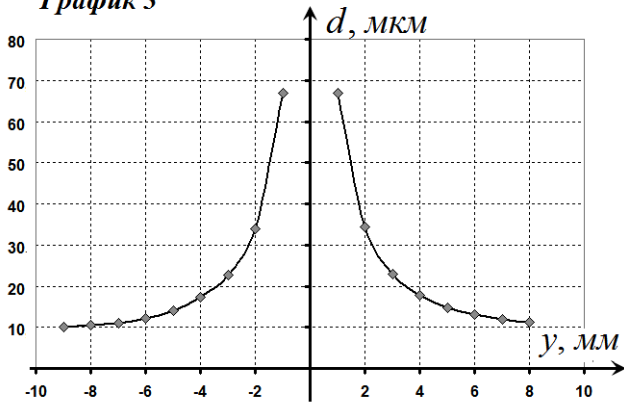
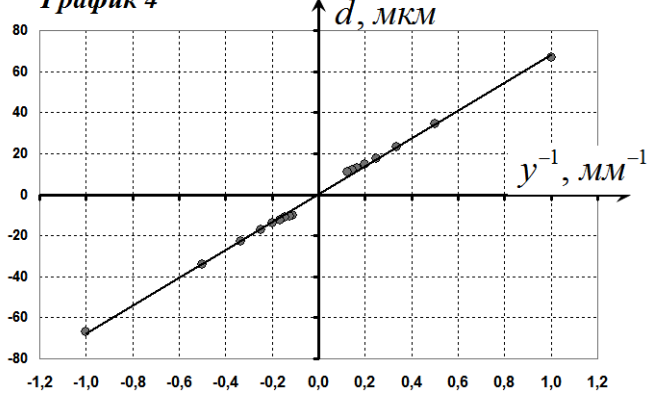


График 4



зависимость напоминает обратно пропорциональную. Что подтверждается графиком зависимости периода решетки от величины обратной смещению $d(y^{-1})$, которая близка к линейной (График 4). Для большей наглядности левую половину графика мы отразили вертикально.

Таким образом, мы показали, что период решетки обратно пропорционален расстоянию до центра зеркала. Такой вид зависимости объясняется строением зеркала. Как сказано в условии, зеркало состоит из концентрических отражающих колец. Если квадрат диаметра кольца пропорционален его номеру

$$D_n^2 = Cn, \quad (17)$$

то края этих колец будут совпадать с границами зон Френеля, поэтому такая система отражает свет подобно сферическому зеркалу. Если формула (17) справедлива для исследуемого

зеркала, то расстояния между соседними кольцами (то есть период решетки) находится по формулам

$$\begin{aligned} D_{n+1}^2 - D_n^2 = C &\Rightarrow (D_{n+1} - D_n)(D_{n+1} + D_n) = C \Rightarrow \\ d = D_{n+1} - D_n &\approx \frac{C}{2D} \end{aligned} \quad (18)$$

Что и объясняет полученные экспериментальные данные.