

Условие

Задача 10.2 Электронный газ и неоднородный проводник

В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам классической теории. В этой теории электроны проводимости рассматривают как идеальный газ, такой же как идеальный атомарный газ в молекулярной физике, и подчиняющийся тому же уравнению состояния идеального газа.

В учебных пособиях утверждается, что такая модель хорошо качественно описывает законы постоянного тока.

В данной задаче Вам предлагается получить некоторые из известных законов постоянного тока в рамках модели идеального электронного газа и оценить количественно величины, используемые в этой модели. В качестве исследуемого металла выберем медный провод постоянного сечения.

Часть 1. Общие характеристики

Большинство электронов в атоме крепко привязаны к ядру. Однако в металлах один или два внешних электрона могут свободно странствовать по всему веществу, в то время как тяжелые ионы остаются около фиксированных мест в кристаллической решетке. В меди в среднем на один атом приходится один свободный электрон.

1.1. Определите концентрацию n_0 свободных электронов в медном проводнике.

1.2. Предположим, что электроны находятся в тепловом равновесии с ионами решетки. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ хаотического движения электронов при температуре $T = 300 \text{ K}$.

1.3. В действительности, из-за квантовых ограничений средняя скорость движения свободных электронов составляет $\langle v \rangle = 2,0 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, т.е. тепловое равновесие свободных электронов с ионами решетки является плохим приближением. Независимо от значения, которое Вы получили в п. 1.2, примите $\langle v_{\text{кв.}} \rangle = 2,0 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ и определите, какой температуре T_e она соответствует.

1.4. Определите давление P электронного газа при этой температуре.

Часть 2. Электрический ток.

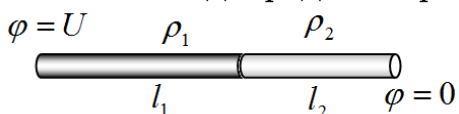
Рассмотрим медный прямолинейный проводник постоянного сечения $S = 1,0 \text{ мм}^2$, через сечение которого течет ток силой $I = 1,0 \text{ А}$.

2.1 Определите среднюю скорость направленного движения (скорость дрейфа $\langle v_{\text{др.}} \rangle$) электронов в проводнике.

2.2. Постоянная разность потенциалов U между концами проводника обеспечивает существование стационарного электрического поля внутри проводника. Определите модуль напряженности E этого поля для проводника длиной $L = 1,0 \text{ м}$ при напряжении между его концами $U = 1,0 \text{ В}$.

2.3. Существование стационарного электрического поля означает, что на электроны внутри проводника действует постоянная сила, под действием которой электроны должны двигаться равноускоренно. Однако скорость их дрейфа постоянна. Обычно это объясняют тем, что электроны испытывают многократные столкновения с ионами решетки, теряя при этом скорость до нуля, снова разгоняются, сталкиваются, теряют скорость и т.д. В рамках этой модели получите закон Ома для участка цепи и определите среднее время τ между двумя

Часть 3. Неоднородный проводник



3.1. Участок цепи состоит из двух проводников одинаковых сечений из разных металлов. Проводники соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 220$ В. Первый проводник длиной l_1 изготовлен из меди, второй проводник длиной l_2 — из константана (сплав 60% меди и 40% никеля). Не нарушая общности решения, будем считать потенциал отрицательного полюса равным нулю, а потенциал положительного $\varphi_0 = U$. Определите потенциал φ в месте соединения проводников в случае $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$.

3.2. Найдите зависимости потенциала φ и модуля напряжённости E стационарного электрического поля внутри проводника от расстояния от начала медного проводника в случае $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$.

3.3. Рассмотрите проводник длиной L , удельное сопротивление материала которого линейно возрастает по длине проводника от ρ_1 на положительном конце до ρ_2 на отрицательном. Как изменяется модуль напряжённости электрического поля в проводнике в зависимости от расстояния от положительного конца проводника? Найдите распределение потенциала φ по длине проводника. Постройте график этого распределения.

Справочные данные

Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$; постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг;
плотность меди $D = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м 3 ; удельное сопротивление меди $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м;
удельное сопротивление константана $\rho_2 = 5,1 \cdot 10^{-7}$ Ом·м;
молярная масса меди $M = 6,4 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

Решение

1.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов меди, следовательно:

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{D}{m_{\text{Cu}}}; \quad m_{\text{Cu}} = \frac{M}{N_A} \Rightarrow$$

$$n_0 = \frac{DN_A}{M}; \quad (1)$$

$$n_0 = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{6,4 \cdot 10^{-2}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (1')$$

1.2. Тепловое равновесие означает, что электронному газу можно присвоить температуру, равную температуре меди. В результате:

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad (2)$$

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2')$$

1.3.

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT_e}{m}} \Rightarrow T_e = \frac{m \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{3k}; \quad (3)$$

$$T_e = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (2 \cdot 10^6)^2}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 8,8 \cdot 10^4 \text{ К}. \quad (3')$$

1.4.

$$p = n_0 k T_e; \quad (4)$$

$$p = 8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 8,8 \cdot 10^4 = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad (4')$$

Это очень большое давление. Однако при его выводе не учитывались положительные ионы кристаллической решетки, взаимодействие с которыми уменьшает давление электронного газа. Полученное значение является парциальным давлением электронного газа, к которому необходимо добавить давление электрического поля, создаваемого положительным зарядом, которое противоположно по знаку.

Часть 2.

2.1. По определению сила тока: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$; $\Delta q = \Delta N e$, где ΔN количество электронов, способных за промежуток времени пересечь поперечное сечение проводника. $\Delta N = n_0 \Delta V$, $\Delta V = S \Delta l = S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t$ (см. рисунок). В итоге: $\Delta q = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t \Rightarrow I = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Rightarrow$

$$\langle v_{\text{др.}} \rangle = \frac{I}{n_0 e S}; \quad (5)$$

$$\langle v_{\text{др.}} \rangle = \frac{1}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 7,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5')$$

Это очень малая скорость, особенно по сравнению со скоростью хаотического движения электронов. Тем не менее, с такой скоростью дрейфует много электронов, в результате этого получается заметный ток.

2.2. Для однородного поля:

$$E = \frac{U}{L}; \quad E = 1,0 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (6)$$

2.3. Средняя скорость равноускоренного движения из состояния покоя равна $\frac{1}{2} v_{\text{max}}$ и совпадает со средней скоростью дрейфа: $\frac{1}{2} v_{\text{max}} = \langle v_{\text{др.}} \rangle \Rightarrow$ (учитывая (5)):

$$v_{\text{max}} = \frac{2I}{n_0 e S}. \quad (7)$$

С другой стороны: $v_{\text{max}} = a \tau$, где ускорение: $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{mL} \Rightarrow$

$$\frac{eU}{mL} \tau = \frac{2I}{n_0 e S} \Rightarrow I = \frac{n_0 e^2 \tau S}{2mL} U. \quad (8)$$

Сила тока пропорциональна напряжению, это и есть закон Ома. Сопротивление:

$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow R = \frac{2mL}{n_0 e^2 \tau S}. \quad (9)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой $R = \rho_1 \frac{L}{S}$, получим:

$$\rho_1 = \frac{2m}{n_0 e^2 \tau} \Rightarrow \tau = \frac{2m}{n_0 e^2 \rho_1}; \quad (10)$$

$$\tau = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} = 5,0 \cdot 10^{-14} \text{ с}. \quad (10')$$

3.1. Сопротивление первого проводника: $R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S}$, второго — $R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S}$. Сила тока в проводниках: $I_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_1} = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1} S$; $I_2 = \frac{\varphi_1 - 0}{R_2} = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2} S$. Поскольку при последовательном соединении сила тока в проводниках одинакова,

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1} S = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2} S \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0 \frac{\rho_2 l_2}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}. \quad (12)$$

При $l_1 = l_2$: $\varphi = \varphi_0 \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; $\varphi_1 = 220 \cdot \frac{5,1 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-8} + 5,1 \cdot 10^{-7}} = 213 \text{ В}$.

3.2. Закон Ома: $I = \frac{\varphi_0 - \varphi}{R} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 - I \rho \frac{l}{S}$. Зависимость потенциала φ от длины проводника l линейная, φ равномерно убывает в медном проводнике от φ_0 до φ_1 , а в проводнике из константана от φ_1 до 0.

Напряжённость поля в каждом проводнике постоянная, однако, на границе соединения проводников претерпевает разрыв, в результате в проводнике из меди $E_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{l} = \frac{7,0}{l} \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$, а в проводнике из константана $E_2 = \frac{\varphi_1}{l} = \frac{213}{l} \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$.

3.4. Совместим ось Ox с осью проводника, поместив начало оси на положительный конец. Удельное сопротивление материала проводника изменяется по закону:

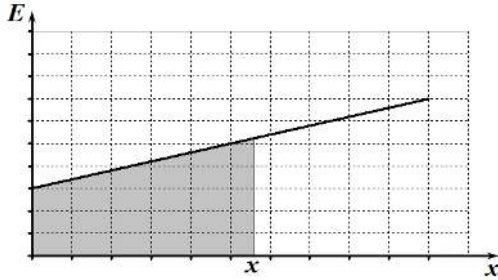
$$\rho = \rho_1 \left(1 + \beta \frac{x}{L} \right), \text{ где } \beta = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5,1 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-8}} = 30. \quad (14)$$

Так как сила тока постоянна в любом сечении проводника, то для плотности тока (которая также постоянна) можно записать

$$j = \frac{1}{\rho} E = \text{const}. \quad (15)$$

Откуда следует, что напряжённость электрического поля изменяется по закону

$$E = j\rho = j\rho_1 \left(1 + \beta \frac{x}{L} \right). \quad (16)$$



В этой зависимости нам не известна плотность тока, которую можно найти, зная значения потенциалов на концах проводника. Построим график зависимости модуля напряжённости от координаты. Площадь под графиком от точки $x = 0$ до некоторого значения X численно равна разности потенциалов между этими точками. Поэтому потенциал в точке с координатой X равен

$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2}(E(0) + E(x)) \cdot x = U - \frac{1}{2}j\rho_1 \left(2 + \beta \frac{x}{L} \right) x. \quad (17)$$

Эта функция при $x = L$ должна обращаться в нуль, что и дает возможность определить неизвестную постоянную:

$$U - \frac{1}{2}j\rho_1(2 + \beta)L = 0 \Rightarrow j = \frac{U}{\frac{1}{2}\rho_1(2 + \beta)L}. \quad (18)$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для распределения потенциала

$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2}j\rho_1 \left(2 + \beta \frac{x}{L}\right) x = U - U \frac{\left(2 + \beta \frac{x}{L}\right) x}{(2 + \beta)L}. \quad (19)$$

Если обозначить $\xi = \frac{x}{L}$, то эта функция приобретает вполне удобоваримый вид банальной параболы (с учетом $\beta = 30$):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= U \left(1 - \frac{(2 + \beta\xi)\xi}{(2 + \beta)}\right) = \\ &= U \left(1 - \frac{(2 + 30\xi)\xi}{32}\right). \end{aligned}$$

График этой функции показан на следующем рисунке.

