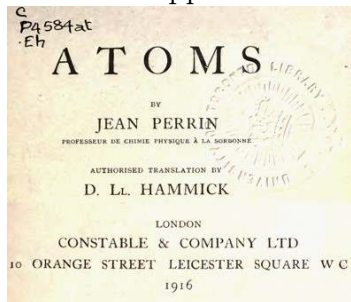


Условие

Броуновское движение было открыто английским ботаником Р. Броуном в 1827 году, когда он проводил исследования пыльцы растений. В 1905 году Альбертом Эйнштейном была создана молекулярно-кинетическая теория для количественного описания броуновского движения. Формула Эйнштейна была подтверждена опытами Жана Перрена и его студентов в 1908-1909 гг. В качестве броуновских частиц они использовали зёрнышки смолы мастикового дерева и гуммигута — густого млечного сока деревьев рода гарциния.

В 1926 г. Ж. Перрен получил Нобелевскую премию по физике.

В данной задаче вам предстоит разобраться в сущности одного из экспериментов, проведенных Ж. Перреном



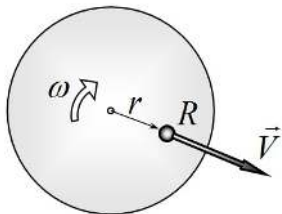
Задача написана на основе книги Ж. Перрена «Атомы» г. Все численные данные взяты из этой книги. В качестве иллюстраций использованы выдержки из указанного издания. Информация, содержащаяся в этих вырезках, полностью содержится в тексте задачи, поэтому переводить тексты из указанной книги нет необходимости.

Справка для любопытных: *gamboge* [gæm'bəʊdʒ] - гуммигут (млечный сок некоторых тропических растений)

Часть 1. Получение однородной эмульсии².

Для получения эмульсии Ж. Перрен растирал гуммигут пальцами под водой. При этом образовывалась краска ярко желтого цвета. Однако, образовавшиеся шарики гуммигута имели различные размеры, а для проведения измерений требовалась эмульсия, частички которой одинаковы. Для разделения частиц Ж. Перрен использовал центрифугу – быстро вращающийся цилиндрический сосуд, в котором содержалась исходная эмульсия.

I treated 1 kilogramme of gamboge and obtained after several months a fraction containing a few decigrammes of grains having diameters approximately equal to the diameter I wished to obtain.



1.1 Сферическая частица радиуса R (из материала плотности ρ) находится в жидкости (плотности ρ_0) на расстоянии r от оси вертикального сосуда, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Найдите зависимость скорости радиального движения частицы V от расстояния до вращения.

На частицу сферической формы в жидкости действует сила вязкого трения, определяемая формулой Стокса

$$F = 6\pi\eta RV, \quad (1)$$

где η - так называемый, коэффициент вязкости жидкости (считайте эту величину известной).

1.2 Во сколько раз изменится скорость частицы, если ее радиус уменьшится в два раза?

1.3 (Опыты Перрена) Рассчитайте значение скорости движения частицы гуммигута радиуса $R = 0,212 \text{ мкм} = 0,212 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, находящейся на расстоянии $r = 15,0 \text{ см}$ от оси вращения центрифуги. Центрифуга совершает 2500 оборотов в минуту, в сосуде находится водная эмульсия. Численные значения характеристик воды и гуммигута приведены в Справочных данных. 1.4 Оцените время, за которая частица (в условия, описанных в п. 1.2) сместится на расстояние $l = 5,0 \text{ см}$.

Часть 2. Определение размеров частиц.

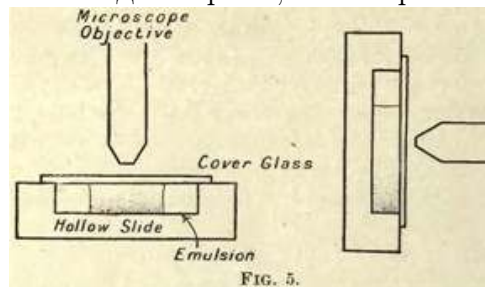


Для измерения размеров частиц Ж. Перрен использовал три различных метода. В одном из них он измерял скорости падения частиц в жидкости. Для этого в вертикальный сосуд с жидкостью вливался тонкий слой эмульсии, содержащей гранулы примерно одного размера (после центрифугирования). Этот слой медленно опускался в воде. Из-за броуновского движения происходило медленное распывание самого слоя, но оно составляло не более 1/50 от того расстояния, на которое частицы опускались.

The edge of the cloud of grains as it sinks will not be very sharply defined, for as a result of the fortuitous fluctuations due to the molecular agitation, the grains will not all fall from the same height; however, by taking the "middle" of the zone, it is possible to evaluate to within nearly $\frac{1}{50}$ the mean value of the distance fallen (it is of the order of a few millimetres per day) and the mean velocity of fall can consequently be obtained.

2.1 Пренебрегая броуновским движением, найдите скорость опускания сферической частицы гуммигута радиуса $R = 0,212 \text{ мкм}$ в воде.

2.2 Найдите время, за которое слой частиц опустится на расстояние $l = 5,0 \text{ см}$.



Часть 3. Распределение частиц по высоте.

В первой основной серии экспериментов Ж. Перрен изучал распределение частиц по высоте с помощью микроскопа. Оказалось, что концентрация частиц убывает с высотой, также как уменьшается концентрация молекул газа в поле тяжести Земли. Теоретический

анализ, проведенный А. Эйнштейном, показал, что поведение частиц в эмульсии полностью аналогично поведению молекул газа. Иными словами, части можно рассматривать как очень большие молекулы.

Рассмотрим изменение концентрации молекул кислорода в земной атмосфере. Будем считать, что температура воздуха одинакова на всех высотах и равна $t^\circ = 20^\circ\text{C}$

3.1 Рассчитайте, на какой высоте концентрация молекул кислорода уменьшается на 1,0%. 3.2 Покажите, что концентрация молекул кислорода уменьшается в 2 раза на высоте, которая рассчитывается по формуле:

$$h_{1/2} = 0,01N \cdot \frac{RT}{Mg} = 0,69 \frac{R_G T}{Mg}, \quad (2)$$

где R_G - универсальная газовая постоянная, M - молярная масса газа.

3.3 (Опыты Перрена) В одной из серий экспериментов Ж. Перрен использовал водную эмульсию, содержащую частицы радиуса $R = 0,212$ мкм. В результате подсчета в общей сложности 13000 частиц, Ж. Перрен выяснил, что на высотах

A series of experiments was carried out with the greatest care, using gamboge grains of radius $\cdot 212\mu$ (using the reduced field of vision method). Cross readings were taken in a cell 100μ deep on four horizontal equidistant planes across the cell at the levels

$5\mu, 35\mu, 65\mu, 95\mu.$

The readings gave at these levels, from a count of 13,000 grains, concentrations proportional to the numbers

$100, 47, 22.6, 12,$

5; 35; 65; 95;

микрон, концентрации частиц

пропорциональны числам

100; 47; 22,6; 12.

Температура, при которой проводились измерения, равнялась $t^\circ = 20^\circ\text{C}$.

По этим данным Ж. Перрен впервые в истории оценил (с точностью до одной значащей цифры) постоянную А. Авогадро. Сделайте это и Вы.

Универсальная газовая постоянная R_G измеряется достаточно простыми методами, и Ж. Перрену (как и Вам) была известна.

Справочные данные.

Плотность воды $\rho_0 = 0,998 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Плотность гуммигута $\rho_0 = 1,194 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вязкость воды $\eta = 1,005 \cdot 10^{-6} \text{Па} \cdot \text{с}$

Ускорение свободного падения $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Универсальная газовая постоянная $R_G = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Молярная масса кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$



Решение

1.1 На частицу во вращающейся жидкости в радиальном направлении действуют сила вязкого трения (сила Стокса) $F_C = 6\pi\eta RV$ и сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r$. Эти силы сообщают частице центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$. Пренебрегая изменением модуля скорости частицы относительно жидкости. На основании второго закона Ньютона запишем уравнение

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \omega^2 r = 6\pi\eta RV + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r, \quad (1)$$

Из которого находим скорость радиального движения частицы

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta}. \quad (2)$$

Данная задача также может быть решена в неинерциальной вращающейся системе отсчета, связанной с жидкостью.

1.2 Так как скорость частицы пропорциональна квадрату ее радиуса, то при уменьшении радиуса в два раза, скорость уменьшится в 4 раза.

1.3 Подстановка численных значений приводит к результату $\text{кг}(2\pi) (,0212 \cdot 10^{-6}) \text{м}^2 \cdot (,1194 - ,0998) \cdot 1032500$

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta} = \frac{(0,212 \cdot 10^{-6})^2 \text{ м}^2 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \left(2500 \frac{2\pi}{60}\right)^2 \text{ с}^{-2} \cdot 0,15 \text{ м}}{9 \cdot 1,005 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с}} = \quad (3)$$

$$= 0,010 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

1.3 Из формулы (2) следует, что скорость частицы пропорциональна расстоянию до оси вращения, поэтому движение такой частицы не является равномерным. Для оценки времени движения можно использовать среднее арифметическое скоростей движения частицы в начале и конце рассматриваемого интервала. Для упрощения численных расчетов зависимость скорости от расстояния запишем в виде

$$V(r) = V_0 \frac{r}{r_0}, \quad (4)$$

где V_0 - скорость частицы на расстоянии r_0 , причем в качестве этих величин используем численные значения, рассчитанные в п. 1.2. Указанная оценка времени движения частицы дает

$$\tilde{t} = \frac{2l}{V_0 + V_0 \frac{r_0 + l}{r_0}} = \frac{2 \cdot 0,05}{0,010 \left(1 + \frac{20}{15}\right)} \approx 4,3\text{с} \quad (5)$$

Дополнение. Точный расчет времени движения также может быть проведен. Из уравнения (4), записанного в дифференциальной форме следует, что закон движения имеет экспоненциальный вид

$$\frac{dr}{dt} = V_0 \frac{r}{r_0} \Rightarrow r = r_0 \exp\left(\frac{V_0}{r_0} t\right).$$

Из точного закона движения находим время смещения частицы на расстояние l :

$$\tilde{t} = \frac{r_0}{V_0} \ln \frac{r_0 + l}{r_0} = \frac{0,150}{0,010} \ln \frac{20}{15} = 4,32\text{ с}.$$

Часть 2. Определение размеров частиц.

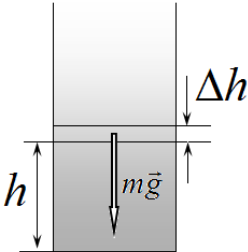
2.1 Для определения скорости опускания частиц достаточно в формуле (2) заменить центростремительное ускорение ускорением свободного падения. Расчет скорости в этом случае приводит к следующему значению кг $(-6)2 \cdot (-) \cdot 3 \cdot -2 \cdot 2,021210\text{м}, 1194,099810,981\text{см}$ $R(\rho - \rho)g$ 30м $V = 9\eta \text{кг} \cdot \text{м} \cdot 9 \cdot 1005 \cdot \text{с}(6) \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м} = 9,55 \cdot 10^6 \text{ с}$

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} = \frac{(0,212 \cdot 10^{-6})^2 \text{ м}^2 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,81 \text{с}^{-2} \cdot \text{м}}{9 \cdot 1,005 \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с}} = 9,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (6)$$

2.2 Скорость движения в данном случае постоянна, поэтому время движения рассчитывается по формуле $t = \frac{l}{V} = \frac{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ с}$, (7)

$$t = \frac{l}{V} = \frac{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ с}, \quad (7)$$

что примерно равно полутора часам.



Часть 3. Распределение частиц по высоте.

3.1 При постоянной температуре концентрация молекул газа пропорциональна давлению газа. Изменение давления с высотой связано с действием силы тяжести. В пределах слоя малой толщины можно считать давление (а также концентрацию и плотность) постоянным. Тогда для изменения ΔP давления при подъеме на высоту Δh справедливо выражение (где плотность газа выражена из уравнения состояния):

$$\Delta P = -\rho g \Delta h = -\frac{PM}{RT} g \Delta h. \quad (8)$$

Полагая $\frac{\Delta P}{P} = 1\% = 0,01$, из этой формулы находим высоту

$$(\Delta h)_{1\%} = \frac{\Delta P}{P} \cdot \frac{RT}{Mg} = 0,01 \frac{8,31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 77,6 \text{ м} \approx 80 \text{ м}. \quad (9)$$

3.2. На каждом слое толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ концентрация убывает на 1%, следовательно, с увеличением числа слоев концентрация убывает в геометрической прогрессии. Найдем, сколько слоев толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ необходимо пройти, чтобы, уменьшение концентрации составило 50%. Для этого надо решить уравнение

$$0,99^N = 0,5 \Rightarrow N \approx 69 \quad (10)$$

Следовательно, высота, на которой концентрация убывает в два раза, равна

$$h_{1/2} = 0,01N \cdot \frac{RT}{Mg} = 0,69 \frac{RT}{Mg}. \quad (11)$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}h\right) \Rightarrow h_{1/2} = \ln 2 \frac{RT}{Mg}.$$

3.3 Так как к частицам применимы законы идеального газа, то применима и формула (11). Только в ней молярную массу молекул надо заменить «молярной» массой частиц $M = N_A m$, где m - масса одной частицы. Кроме того, необходимо учесть действие силы Архимеда на частицу в воде, что приведет к появлению «эффективного» ускорения свободного падения g^* . С учетом этих оговорок, из формулы (11) следует выражение для расчета постоянной Авогадро

$$h_{1/2} = 0,69 \frac{RT}{Mg} = 0,69 \frac{RT}{N_A m g^*} \Rightarrow N_A = 0,69 \frac{RT}{m g^* h_{1/2}}. \quad (12)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$\begin{aligned} N_A &= 0,69 \frac{RT}{m g^* h_{1/2}} = 0,69 \frac{RT}{\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho - \rho_0) g h_{1/2}} = \\ &= 0,69 \frac{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 293 \text{ К}}{\frac{4}{3}\pi (0,212 \cdot 10^{-6})^3 \text{ м}^3 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,81 \text{ с}^{-2} \cdot \text{м} \cdot 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = \\ &= 7,23 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \approx 7 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

*Это значение немного превышает современное постоянной Авогадро, но это же было первое ее экспериментальное измерение!**

