

Условие

Задание 10-2 Закон Ома для ... жидкости.

Законы электрического тока аналогичны законам течения жидкостей по трубам. Течение жидкости более наглядно, но, почему-то, законы для электрического тока известны лучше! В данной работе вам необходимо разобраться с законами течения вязкой жидкости и провести аналогию с законами Ома для электрического тока.

Приборы и оборудование: штатив с лапками, капиллярная трубка, гибкий шланг с крапом, секундомер, мензурка, линейка 40 см, два стакана одноразовых, нитки, скотч.

Часть 1. Теоретическое введение.

Основной характеристикой тока жидкости будем считать **расход** – объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (1)$$

электрическим аналогом этой величины является сила тока.

В качестве единицы измерения расхода будем использовать $[Q] = \frac{\text{мл}}{\text{с}}$ (миллилитр в секунду). В соответствии с формулой Пуазейля расход жидкости, протекающей по трубе, пропорционален разности давлений на концах трубы ΔP (ее электрический аналог – напряжение)

$$Q = \frac{\Delta P}{R}, \quad (2)$$

где R - гидродинамическое сопротивление. Для тонкой цилиндрической трубы эта величина равна

$$R = 8\eta \frac{l}{\pi r^4}. \quad (3)$$

l , r - длина и радиус трубы, η - вязкость жидкости (физическая характеристика жидкости, которая в данной работе является постоянной), $\pi = 3,1415...$ - одна из математических констант.

В данной работе под давлением P будем понимать разность между давлением в данной точке жидкости и атмосферным давлением, причем измерять ее будем в мм (миллиметрах водяного столба):

$$p = \frac{P - P_{\text{атм.}}}{\rho g}. \quad (4)$$

Наконец, единицей измерения гидродинамического сопротивления будем считать

$$[R] = \frac{[p]}{[Q]} = \frac{\text{мм}}{\text{мл} \cdot \text{с}^{-1}},$$

которую для краткости назовем гидроом (гом).

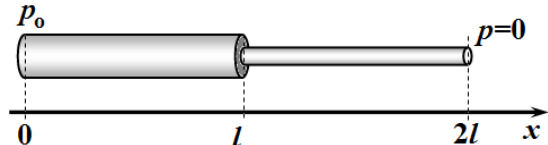
Теперь быстро решите несколько теоретических задач¹.

Подсказка: вспомните вторую задачу теоретического тура, Часть 3.

1.1 Что может служить гидродинамическим аналогом ЭДС?

Труба состыкована из двух труб равной длины, радиусы которых отличаются в два раза. Труба полностью заполнена водой, которая может течь по ней (то есть она включена в некоторый контур).

1.2. Трубу расположили горизонтально и к ее более широкому торцу приложили давление P_0 на втором конце трубы $p = 0$. Нарисуйте график зависимости давления в трубе от координаты x .



1.3 Эту же трубу расположили вертикально (широкой частью вверх). На обоих концах трубы поддерживается давление, равное нулю. Нарисуйте график зависимости давления внутри трубы от координаты.

Часть 2. Наконец-то, экспериментальная!

Внимание! Будьте аккуратны, не разбейте трубку (во-первых, она дорогая, во-вторых, их число ограничено, второй вам могут и не выдать). В работе используется очищенная и дегазированная вода. Используйте только выданную вам воду. Диаметр капилляра мал, мельчайшие частички грязи забивают его, и вода перестает течь. Если у вас случайно забился капилляр – продуйте его. Поддерживайте уровень воды в стакане примерно постоянным.

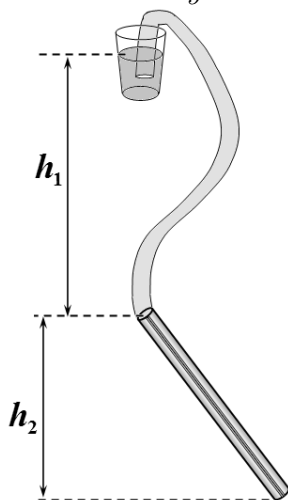
Не стесняйтесь обращаться за помощью к членам жюри!

1 1

Экспериментальная установка состоит из капиллярной трубки, подсоединенного к ней гибкого шланга с краном, стакана с водой. Все детали крепятся на штативе. Вы можете изменять высоту подвеса стакана с водой, высоту крепления капиллярной трубки, угол ее наклона. Объем воды измеряется с помощью мензурки (не забудьте ее подставлять под капиллярную трубку).

Используйте следующие обозначения: h_1 - высота от уровня воды в стакане (источнике) до верхнего среза капиллярной трубки; h_2 - высота от верхнего до нижнего среза трубки (при ее вертикальном положении она, естественно, равна длине трубки).

Эти высоты удобно измерять, отмеряя расстояния от уровня стола.



2.1 Расположите трубку вертикально. Экспериментально докажите, что движение воды по трубке можно считать равномерным. Измерьте расход воды с максимальной точностью, оцените погрешность его измерения. Укажите, при каком значении h_1 вы проводили измерения. В дальнейших заданиях погрешности рассчитывать не надо!

Далее для измерения расхода достаточно измерять времена, за которые по трубке протекает фиксированный объем воды V_0 (рекомендуем принять $V_0 = 20$ мл)

2.2 Исследуйте зависимость расхода воды от высоты h_1 при вертикальном расположении трубки. Постройте график полученной зависимости, определите ее параметры. Дайте теоретическое обоснование полученной зависимости. Определите гидродинамическое сопротивление трубки в *гом'ах*.

В этом эксперименте удобнее изменять высоту подвеса стаканчика.

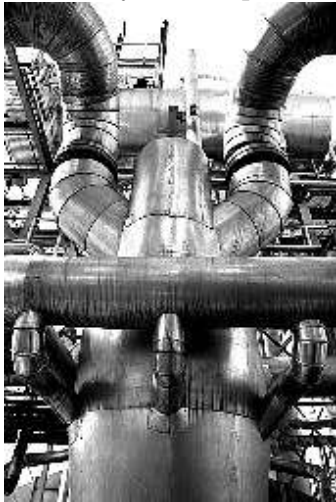
2.3 Исследуйте зависимость расхода воды от высоты h_2 при фиксированной высоте h_1 (обязательно укажите при какой высоте h_1 вы проводили измерения). Постройте график полученной зависимости, определите ее параметры. Дайте теоретическое обоснование полученной зависимости. Определите гидродинамическое сопротивление трубки в *гом'ах* по этим данным.

В этом эксперименте следует изменять угол наклона трубки, оставляя ее верхний срез на неизменном уровне.

2.4 Исследуйте зависимость расхода воды от высоты h_2 при фиксированной высоте $h_1 + h_2$ (обязательно укажите при какой высоте $h_1 + h_2$ вы проводили измерения). Постройте график полученной зависимости. Дайте теоретическое обоснование полученной зависимости. Определите гидродинамическое сопротивление трубки в *гом'ах* по этим данным.

В этом эксперименте следует изменять угол наклона трубки, оставляя ее нижний срез на неизменном уровне.

2.5 Приведите окончательную формулу для расчета расхода воды в данной установке, описывающую все проведенные эксперименты.



Решение

Задание 10-2 Закон Ома для ... жидкости.

Часть 1. Теоретическое введение.

1.1 В данной задаче сторонней силой, способной прогонять воду является сила тяжести. Аналогом ЭДС в данном случае выступает работа силы тяжести, отнесенная к объему жидкости, то есть величина ρgh .

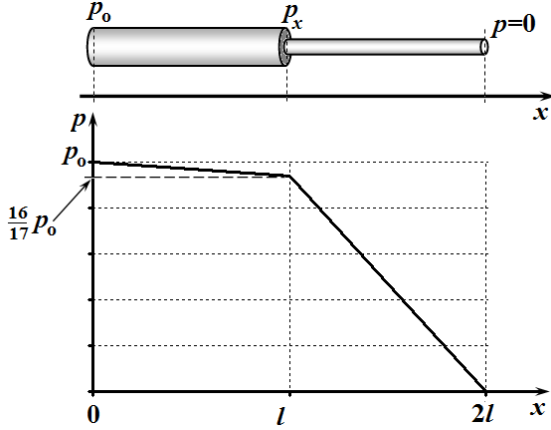
1.2 При движении несжимаемой жидкости, ее расход в любом сечении трубы остается постоянным. Обозначим давление в месте стыка p_x , тогда приравнявая расходы в обеих частях трубы, получим уравнение

$$q = \frac{p_0 - p_x}{R_1} = \frac{p_x}{R_2}, \quad (1)$$

из которого следует

$$p_0 R_2 = (R_1 + R_2) p_x \Rightarrow p_x = p_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

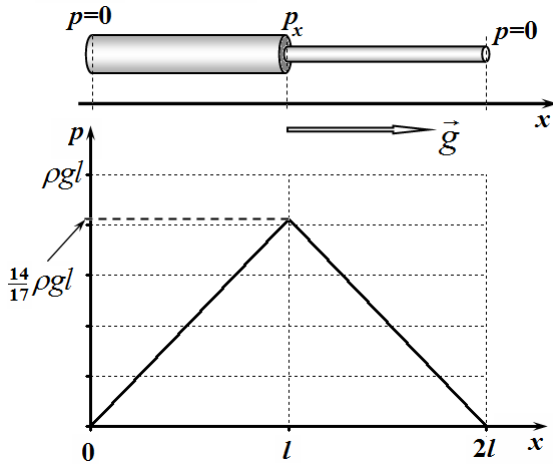
Так как радиусы труб отличаются в два раза, то их



гидродинамические сопротивления изменяются в 16 раз, т.е. $R_2 = 16R_1$. Следовательно, давление на стыке будет равно $p_x = \frac{16}{17}p_0$. В пределах же каждой из частей трубы давление будет падать по линейному закону. График этой зависимости показан на рисунке.

1.3 Если труба расположена вертикально, то на жидкость внутри нее действует сила тяжести (аналог ЭДС в электрической цепи). При неподвижной жидкости давление с глубиной возрастает по закону $p = \rho g x$. При движении жидкости на нее будет действовать тормозящая сила, которую преодолевает разность сил давления. Иными словами при движении жидкости возникает дополнительное падение давления, которой определяется «законом Ома» для движущейся жидкости $\Delta P = Rq$. Кроме того следует учесть, что сопротивление пропорционально длине участка трубы. С учетом этих факторов давление, в верхней более толстой трубе будет изменяться по закону (также линейному)

$$p = \rho g x - R_1 q \frac{x}{l}. \quad (3)$$



Давление в нижней более узкой части трубы закон изменения давления также имеет линейный вид (с учетом, того, что давление на стыке равно $p_x = \rho g l - R_1 q$)

$$\begin{aligned}
p &= p_x + \rho g(x - l) - R_2 q \frac{x - l}{l} = \\
&= \rho g l - R_1 q + \rho g(x - l) - R_2 q \frac{x - l}{l}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Полагая, что на нижнем срезе (при $x = 2l$) давление равно нулю, найдем расход жидкости в составной трубе

$$q = \frac{2\rho g l}{R_1 + R_2} \tag{5}$$

и давление на стыке $p_x = \rho g l - R_1 \frac{2\rho g l}{R_1 + R_2} = \rho g l \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$. Учитывая, что $R_2 = 16R_1$, выразим это давление

$$p_x = \frac{14}{17} \rho g l. \tag{16}$$

График этой функции показан на рисунке.

Из проведенного решения следует важный вывод: если гидродинамическое сопротивление нижней части трубы значительно превышает сопротивление верхней части (как в нашем эксперименте), то падение всего давления фактически происходит на нижней части: иными словами, жидкость в верхней части создает дополнительное давление на нижней части трубы.

Существенное замечание: при переходе из одной трубки в другую скорость жидкости скачком изменяется, поэтому в месте стыка должен существовать скачок давления Δp , который сложным образом зависит от скорости протекания жидкости, т.е. от ее расхода. Учесть его затруднительная задача, поэтому приступим к проведению экспериментов.

Предварительно предполагая, что расход определяется формулой

$$Q \approx \frac{\rho g(h_1 + h_2)}{R_2}. \tag{17}$$

2.1 Для проверки предположения о равномерности течения воды можно измерить зависимость объема протекшей воды от времени. В эксперименте удобнее последовательно засекают времена t_k , когда объем воды в измерительной мензурке достигает определенных значений V_k , соответствующих делениям шкалы мензурки. Результаты таких измерений представлены в Таблице 1. Рядом представлен график полученной зависимости. Отметим, что погрешность измерения времени превышает погрешность измерения объема, поэтому построена именно зависимость времени от объема. Измерения проведены при $h_1 = 450$ мм, $h_2 = 315$ мм (это длина трубки).

Таблица 1. Времена наливания.

$V_k, \text{ мл}$	$t_k, \text{ с}$
1	2,09
2	4,31
3	6,77
4	10,18
5	12,52
6	14,62
7	17,32
8	20,42
9	22,70
10	25,44



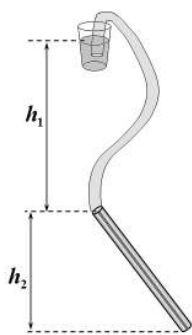
Почти строгая линейная зависимость доказывает, что скорость вытекания постоянна. Коэффициент наклона этой прямой $a = \frac{\Delta t}{\Delta V}$ равен величине обратной расходу. Расчет коэффициентов линейной зависимости $t = aV + b$ по методу наименьших квадратов дает следующие значения ее параметров

$$a = (2,61 \pm 0,06) \frac{\text{с}}{\text{мл}}, \quad b = (-0,7 \pm 0,4) \text{с}. \quad (17)$$

Соответственно, расход воды в данном случае равен

$$Q = \frac{1}{a} = (0,383 \pm 0,009) \frac{\text{мл}}{\text{с}}. \quad (18)$$

Погрешность рассчитана по формуле $\Delta Q = Q \frac{\Delta a}{a}$. Относительная погрешность равна всего 2,5%.



h_1 при вертикальном положении трубки ($h_2 = 315$ мм) приведена в таблице 2. Приведено среднее значение времени вытекания по двум измерениям (участникам олимпиады достаточно провести одно). Расход рассчитано по формуле

$$Q = \frac{\Delta V}{t} \quad (19)$$

Таблица 2.

h_1 , мм	$\langle t \rangle$, с	Q , $\frac{\text{мл}}{\text{с}}$
450	45,66	0,438
415	47,295	0,423
392	48,28	0,414
367	49,6	0,403
340	50,69	0,395
311	52,29	0,382
283	53,77	0,372
245	55,43	0,361
221	58,37	0,343
190	61,5	0,325

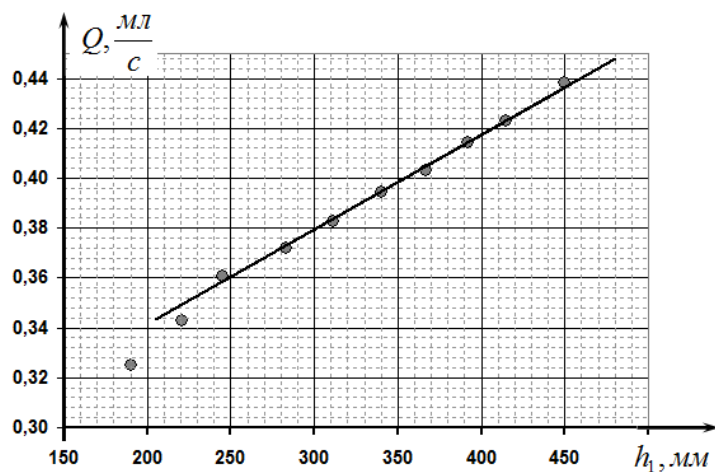


График 2. Зависимость расхода от положения источника

За исключением двух точек (при малой скорости течения) зависимость очень близка к линейной. Параметры этой зависимости $Q = ah_1 + b$ равны

$$a = 3,8 \cdot 10^{-4}, \quad b = 0,27 \quad (20)$$

В соответствии с формулой (17), величина обратная коэффициенту a есть гидродинамическое

сопротивление

$$R_2 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ гом} \quad (22)$$

Тем не менее, полученный результат вызывает сомнения в применимости формулы (17), так как если представить линейную зависимость в виде

$$Q = ah_1 + b = \frac{h + b/a}{R_2}, \quad (23)$$

То видно, что отношение коэффициентов линейной зависимости должно равняться длине трубки. Однако его численное значение равно

$$\tilde{h}_2 = \frac{0,27}{3,8 \cdot 10^{-4}} \approx 710 \text{ мм},$$

Что почти точно в два раза превышает длину капиллярной трубки! Поэтому эмпирическая формула, которая точнее описывает полученные данные, имеет вид

$$Q \approx \frac{\left(\frac{h_1}{2} + h_2\right)}{R_2} = \frac{(h_1 + 2h_2)}{2R_2}. \quad (24)$$

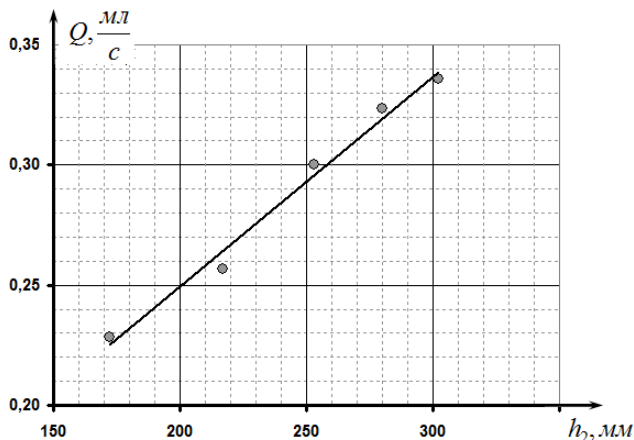
Такой форме записи можно дать некоторое логическое объяснение: упомянутый скачок давления в месте стыка понижает гидростатическое давление жидкости в шланге примерно в два раза. В этом случае рассчитанное сопротивление капилляра необходимо разделить на два. То есть принять

$$\overline{R}_2 = 1,3 \cdot 10^3 \text{ гом} \quad (25)$$

2.3 Результаты измерений зависимости расхода от величины h_2 (при неизменной величине $h_1 = 195 \text{ мм}$) приведены в таблице 3 и на графике 3.

Таблица 3.

$h_1, \text{ мм}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$	$Q, \frac{\text{мл}}{\text{с}}$
302	59,56	0,335796
280	61,87	0,323258
253	66,67	0,299985
217	77,85	0,256904
172	87,65	0,22818



В этом случае параметры линейной зависимости $Q = ah_2 + b$ равны

$$a = 8,7 \cdot 10^{-4}, \quad b = 0,075 \quad (26)$$

Снова мы получили несоответствие, как с проверяемой формулой (17), так и с ранее полученной зависимостью $Q(h_1)$. Попробуем проверить применимость эмпирической формулы (24). Для этого линейную зависимость представим в виде

$$Q = ah_2 + b = \frac{h_2 + \frac{b}{a}}{a^{-1}} = \frac{2h_2 + 2\frac{b}{a}}{2a^{-1}} = \frac{2h_2 + h_1}{R_2}. \quad (27)$$

При записи в такой форме видно, что величина $2\frac{b}{a}$ должна равняться h_1 , расчет примерно подтверждает этот вывод $2\frac{b}{a} = 2\frac{0,075}{8,7 \cdot 10^{-4}} \approx 170$ мм. Гидродинамическое сопротивление в этом случае оказывается равным $R_2 = a^{-1} \approx 1,2 \cdot 10^3$ гом, что близко к значению полученному ранее.

Еще одним подтверждением найденной эмпирической зависимости может служить объединенный график, включающий данные, как одной так второй серии измерений.

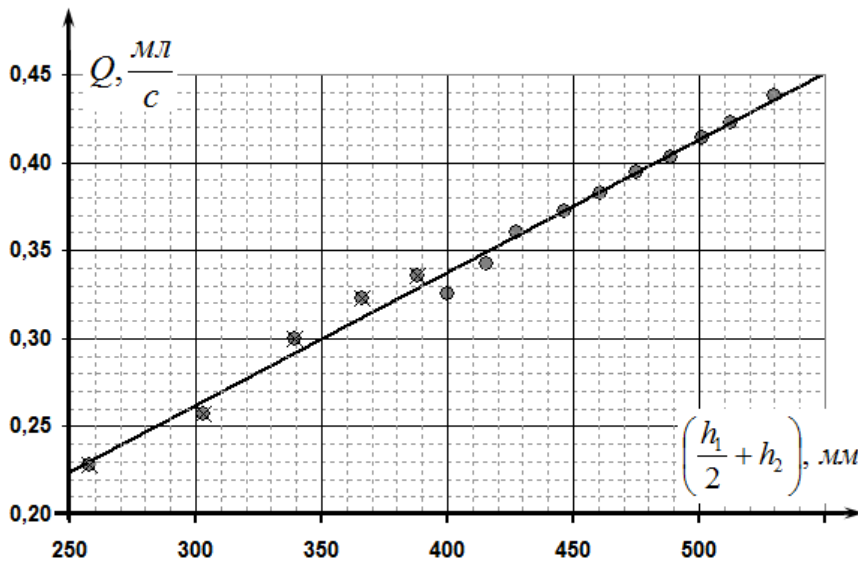


График 4. Зависимость расхода от эффективного напора

¹ Решение этих задач оценивается, но не слишком высоко, все-таки это экспериментальный тур! Но если вы разберетесь с этими задачами, вам легче будет понять ваши результаты измерений (или сделать их подгонку, что не рекомендуется).