

Условие

Около 1852 Дж. Г. Стокс впервые наблюдал флуоресценцию — поглощение флюоритом падающего света с последующим испусканием света поглотителем. В 1900 П. Виллард обнаружил гамма-лучи — испускаемое радием монохроматическое электромагнитное излучение с высокой энергией фотонов. В 1904 Р. Вуд продемонстрировал резонансную оптическую флуоресценцию, которая характеризуется испусканием поглощённой световой энергии в виде излучения той же частоты.

Эффект Мёссбауэра или ядерный гамма-резонанс, открытый в 1958 году Рудольфом Мёссбауэром в Институте им. М. Планка в Гейдельберге (ФРГ), состоит в резонансном испускании или поглощении гамма-лучей без отдачи.

В 1961 году за открытие и теоретическое обоснование явления ядерного гамма-резонанса Р. Л. Мёссбауэру была присуждена Нобелевская премия по физике.

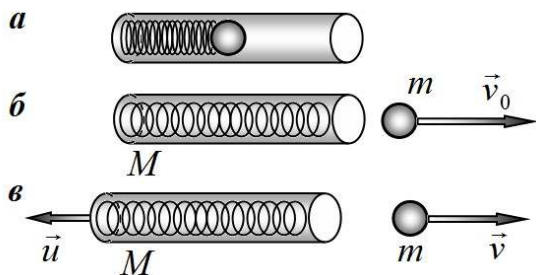
Введение.

Не смотря на то, что процессы испускания и поглощения фотонов атомами и ядрами строго описываются только в рамках квантовых представлений, многие стороны этих явлений могут быть качественно объяснены в рамках классической физики. Так каждый атом имеет набор собственных частот, поэтому испускает электромагнитные волны со строго определенным набором частот (в инфракрасном, видимом и ультрафиолетовом диапазонах). При поглощении света атомами поглощается излучение только тех частот, которые близки к собственным частотам колебаний, подобно традиционному резонансу в классических системах. Аналогичная ситуация и с излучением атомных ядер — только энергия квантов этого излучения лежит в области гамма-излучения (поэтому в этой области говорят не о частотах и длинах волн, а об энергии квантов).

Так как энергия (и импульс) гамма квантов велика, то при их испускании ядром, само ядро получает импульс отдачи. Следовательно, уносит часть энергии, уменьшая тем самым энергию испущенного гамма-кванта. Тем самым гамма-излучение, испущенное ядром не поглощается другим аналогичным ядром. Р. Мессбауэр показал, что в некоторых случаях излучение гамма-квантов может происходить без отдачи, следовательно, аналогичные ядра, находящиеся в аналогичных условиях могут сильно (резонансно) поглощать это излучение.

В задаче использованы материалы статьи самого Р. Мёссбауэра «РЕЗОНАНСНОЕ ЯДЕРНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ γ -КВАНТОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ БЕЗ ОТДАЧИ», опубликованной в журнале «Успехи физических наук» в декабре 1960 года (том LXXII, вып. 4)

Часть 1. Энергия отдачи.



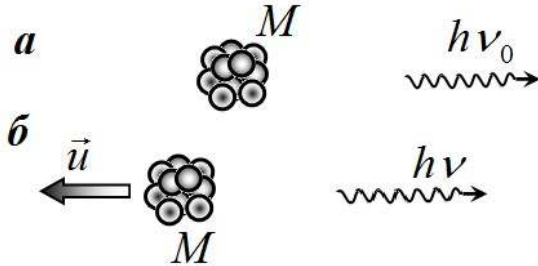
Пружинная пушка состоит из цилиндрического закрытого с одной стороны ствола, внутри которого расположена упругая пружина (рис. 1 а). Пружина выталкивает шарик-снаряд. Отношение массы снаряда к массе пушки равно $\frac{m}{M} = \mu$. Если закрепить ствол, то снаряд вылетает из пушки со скоростью v_0 (рис. 1 б). Считайте, что во всех случаях начальное сжатие пружины постоянно, а в процессе выстрела пружина полностью распрямляется.

1.1 Чему будет равна скорость снаряда V , если ствол пушки не закреплен и может свободно

двигаться (рис. 1 в)?

1.2 Найдите относительное изменение скорости снаряда $\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v-v_0}{v_0}$, возникающее вследствие отдачи ствола, считая отношение массы снаряда к массе ствола μ малым.

1.3 Найдите относительное изменение энергии снаряда $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E-E_0}{E_0}$, возникающее вследствие отдачи ствола, считая отношение массы снаряда к массе ствола μ малым.



1.4 Неподвижное ядро массы³ M испускает гамма-квант с энергией $h\nu_0$. Чему будет равна энергия, если этот квант испускается свободным ядром? Чему равно относительное изменение энергии гамма кванта вследствие отдачи ядра. *Ответы выразите через безразмерный параметр μ равный отношению энергии гамма-кванта к энергии покоя ядра $\varepsilon_0 = \frac{h\nu_0}{Mc^2}$ (здесь и далее C - скорость света, h - постоянная Планка).* Также рекомендуем использовать величину $\varepsilon = \frac{h\nu}{Mc^2}$ -отношение энергии гамма-кванта к энергии покоя ядра. а) решите задачу, считая, что движение ядра подчиняется законам классической физики; б) решите задачу в релятивистском приближении

Напоминание: в специальной теории относительности доказано, что энергия частицы E и ее импульс P связаны соотношением

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2. \quad (1)$$

1.5 Найдите относительное изменение энергии гамма-кванта вследствие отдачи ядра, считая параметр ε_0 малым. Сравните эти изменения, рассчитанные в классическом и релятивистском приближениях.

1.6 В своих экспериментах Р. Мёссбауэр использовал ядра одного из изотопов иридия Ir^{191} , испускающего кванты с энергией⁴ $E_0 = 129$ кЭв. Найдите энергию покоя ядра иридия Ir^{191} в электронвольтах. Оцените параметр ε_0 для этого ядра. Оцените скорость ядра Ir^{191} после испускания гамма-кванта. Можно ли для описания эффектов отдачи пользоваться классическим приближением?

Масса протона (и примерно ей равная масса нейтрона) равна $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл

1.7 Рассчитайте относительный сдвиг энергии гамма-кванта, возникающий вследствие отдачи ядра.

³ Здесь и далее речь идет о массе покоя, с современной точки зрения нет смысла говорить о массе движущегося тела. ⁴ В ядерной физике энергию принято измерять в Эв (электронвольтах). 1Эв – энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в 1 вольт.

1.8 Ядро может поглотить гамма-квант, если во внутреннюю энергию переходит энергия E_0 , равная энергии гамма-кванта, испущенного таким же неподвижным ядром. должна равняться энергия гамма-кванта $E = h\nu$, что бы он мог поглотиться свободным ядром Ir^{191} ? Найдите только относительную разность этих энергий $\frac{\Delta E}{E_0}$.

Часть 2. Эффект Доплера.

2.1 Неподвижный источник, испускает волну с частотой ν_0 . Чему будет равна частота волны, если источник движется с постоянной скоростью V в направлении распространения волны? Скорость волны равна C .

Часть 3. За что дают Нобелевские премии?

3.1 Для компенсации сдвига энергий гамма-квантов, предлагается использовать эффект Доплера. Для этого источник, содержащий атомы Ir^{191} , приближают к поглотителю, также содержащему атомы Ir^{191} . Оцените скорость, с которой должен приближаться источник к поглотителю, чтобы началось эффективное резонансное поглощение гамма-квантов? (рис. из статьи Мёссбауэра). Считайте, что все атомы иридия (в источнике и в поглотителе) свободны и изначально покоятся

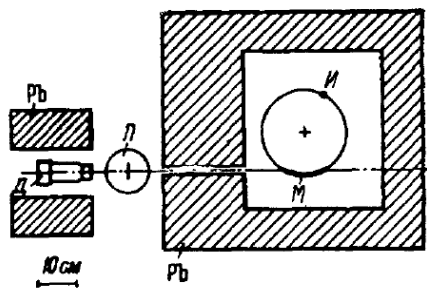


Рис. 2. Геометрия опыта. $И$ — криостат с поглотителем ($T = 88\text{ K}$); $М$ — вращающийся криостат с источником ($T = 88\text{ K}$); $Д$ — детектор; $И$ — источник.

3.2 Качественно опишите влияние температуры на эффективность поглощения?

3.3 Свои эксперименты Р. Мёссбауэр проводил при низких температурах. В результате проведенных измерений оказалось, что зависимость эффективности поглощения от скорости источника имеет вид, показанный на рисунке (обратите внимание – шкала скоростей в см/с).

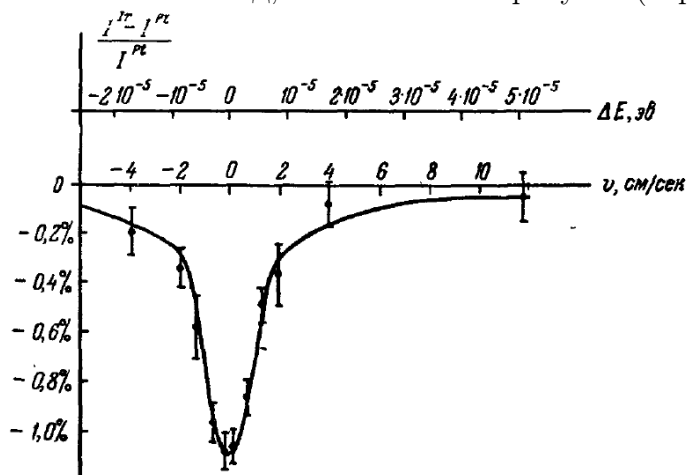


Рис. 3. Относительная разность интенсивностей γ -излучения, проходящего через иридиевый и платиновый поглотители, в функции относительной скорости источника и поглотителя.

Р. Мёссбауэр предположил (и оказался прав), что при определенных условиях атомы в кристаллах оказываются жестко связанными, поэтому импульс отдачи передается не отдельному атому, а всему кристаллу. Чему равен параметр ε_0 в этом случае? **3.4** Ядро, как и атом, испускает не одну единственную частоту, а частот в некотором малом интервале $\Delta\nu$. Причем энергии квантов лежат в некотором диапазоне шириной ΔE , который определяется соотно-

шением

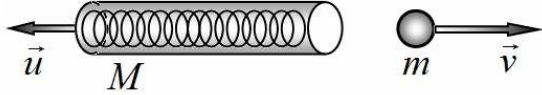
неопределенности $\Delta E \cdot \tau \approx h$, где τ - время жизни ядра в возбужденном состоянии. Используя приведенный график, оцените время жизни ядра Ir^{191} в возбужденном состоянии.

Постоянная Планка равна $h = 6,64 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

Решение

1.1 Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии для снаряда и пушки

$$\begin{cases} mv = Mu \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$



Здесь $\frac{mv_0^2}{2}$ - энергия сжатой пружины, которая одинакова при выстреле из закрепленной и незакрепленной пушки. Разделив оба уравнения на массу пушки получим

$$\begin{cases} \mu v = u \\ \frac{\mu v^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражения для скорости отдачи из первого уравнения во второе, найдем искомую скорость снаряда

$$\mu v^2 + \mu^2 v^2 = \mu v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \mu}}. \quad (3)$$

1.2 Если μ мало, то для скорости снаряда можно записать

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \mu}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right). \quad (4)$$

Тогда относительное изменение скорости снаряда определяется выражением

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{1}{2} \mu. \quad (5)$$

1.3 Потеря энергии снаряда равна кинетической энергии, приобретаемой стволом при отдаче

$$\Delta E = -\frac{Mu^2}{2}. \quad (6)$$

Следовательно, относительное изменение энергии фотона в следствие отдачи равно

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{Mu^2}{mv_0^2} = -\frac{\mu v^2}{v_0^2} = -\frac{\mu}{1 + \mu}. \quad (7)$$

При малых μ можно пренебречь этой малой величиной в знаменателе, тогда

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{\mu}{1 + \mu} \approx -\mu \quad (8)$$

1.4 Законы сохранения импульса и энергии в данном случае выражаются уравнениями

$$Mu = \frac{h\nu}{c}, \quad (9)$$

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{Mu^2}{2}. \quad (10)$$

Выражая из уравнения (9) $u = \frac{h\nu}{Mc}$ и подставляя в уравнение (10), получим

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{M}{2} \left(\frac{h\nu}{Mc} \right)^2. \quad (11)$$

Для упрощения алгебраических выкладок разделим на это уравнение на Mc^2 :

$$\frac{h\nu_0}{Mc^2} = \frac{h\nu}{Mc^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{Mc^2} \right)^2.$$

Используя предложенные параметры, получаем простое квадратное уравнение:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (12)$$

положительное решение которого

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\varepsilon_0} - 1. \quad (13)$$

.возвращаясь к обычным единицам, получим

$$h\nu = Mc^2 \left(\sqrt{1 + 2\frac{h\nu_0}{Mc^2}} - 1 \right). \quad (14)$$

В релятивистском подходе систему уравнений законов сохранения импульса и энергии имеет вид

$$p = \frac{h\nu}{c} h\nu_0 + Mc^2 = h\nu + E_n. \quad (15)$$

где E_n . P - энергия и импульс, приобретенные ядром. Она связана с импульсом ядра соотношением

$$E_n^2 = M^2c^4 + p^2c^2. \quad (16)$$

Выражая из системы (15) импульс и энергию ядра и подставляя в уравнение (16), получим

$$(h\nu_0 - h\nu + Mc^2)^2 = (Mc^2)^2 + (h\nu)^2. \quad (17)$$

Как и ранее разделим это уравнение на $(Mc^2)^2$ и используем относительные единицы, в результате чего получим квадратное уравнение:

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)^2 = 1 + \varepsilon^2 \quad (18)$$

Решение этого уравнение не сложно

$$(\varepsilon_0 + 1)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon_0 + 1) + \varepsilon^2 = 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{(\varepsilon_0 + 1)^2 - 1}{2(\varepsilon_0 + 1)}. \quad (19)$$

1.5 При $\varepsilon_0 \ll 1$ относительное изменение энергии гамма-кванта также будет малым. Поэтому приближенные выражения можно получить непосредственно из уравнений для величины ε . Так из уравнения (12) следует:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (20)$$

А из уравнения (18) получим

$$\begin{aligned} (1 - \Delta\varepsilon)^2 &= 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow 1 - 2\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon + (\Delta\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow \\ -2\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon &\approx \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (21)$$

Как следует из полученных формул, в первом приближении оба подхода дают одинаковые результаты.

1.6 Энергия покоя ядра Ir^{191} равна

$$E = \frac{Mc^2}{e} = \frac{191 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,79 \cdot 10^{11} \text{ эВ} \quad (22)$$

Следовательно, введенный параметр равен

$$\varepsilon_0 = \frac{129 \cdot 10^3}{1,79 \cdot 10^{11}} \approx 7,2 \cdot 10^{-7}. \quad (23)$$

Что значительно меньше 1, поэтому классическое приближение вполне применимо. Энергия отдачи в соответствии с формулой (19) равна

$$\Delta\varepsilon \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} = Mc^2 \frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow v = c\varepsilon_0 \approx 2,2 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (24)$$

1.7 Относительный сдвиг энергии гамма кванта равен $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \approx 3,6 \cdot 10^{-6}$.

1.8 Энергия гамма кванта должна быть больше, чем E_0 , так как часть энергии кванта перейдет в кинетическую энергию движения ядра. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии, при условии, что гамма-квант поглотился

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = Mu \\ h\nu = h\nu_0 + \frac{Mu^2}{2} \end{cases} \quad (25)$$

Так как разность энергий является малой, то эти уравнения можно решать приближенно (и быстро):

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = Mu \\ h\nu = h\nu_0 + \frac{Mu^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta(h\nu) = \frac{Mu^2}{2} = \frac{(Mu)^2}{2M} = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} \approx \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (26)$$

Таким образом, относительный сдвиг, который приведет к поглощению гамма-кванта, равен сдвигу при отдаче, только направлен в другую сторону (в сторону увеличения частоты).

2.1 Если источник движется, то длина испущенной волны уменьшится на расстояние, которой проходит источник за один период волны. Следовательно, длина волны, испущенной движущимся источником, будет равна

$$\lambda = \lambda_0 - V_0 T_0. \quad (27)$$

Переходя к частотам волны, получим

$$\frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0} - \frac{V_0}{\nu_0}. \quad (28)$$

Откуда следует, что частота и ее относительный сдвиг (при скоростях источника, значительно меньше скорости волны) определяются по формулам

$$\nu = \nu_0 \frac{c}{c - V_0} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{V_0}{c} \right) \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx \frac{V_0}{c}. \quad (29)$$

Часть 3. За что дают Нобелевские премии?

3.1 Для резонансного поглощения необходимо, чтобы сдвиг отдачи (как при испускании, так и при поглощении) был скомпенсирован доплеровским сдвигом, откуда следует, что должно выполняться условие

$$\frac{V_0}{c} \approx 2 \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow V_0 \approx \varepsilon_0 c \approx 2,2 \cdot 10^2 \frac{M}{c}. \quad (30)$$

Что равно скорости ядра при отдаче.

3.2 Повышение температуры должно приводить к усилению поглощения, так как в этом случае разброс скоростей теплового движения атомов становится больше. Следовательно, для больших пар атомов (один в источнике, другой в поглотителе) доплеровский сдвиг компенсирует сдвиг отдачи.

3.3 По графику можно найти, что поглощение практически прекращается, при изменении скорости на величину $\Delta V \approx \pm 2 \text{ см/с}$. Этому интервалу соответствует интервал частот $\Delta \nu \approx \nu_0 \frac{\Delta V}{c} = \frac{E_0}{h} \frac{\Delta V}{c}$, или интервал энергий¹ $\Delta E \approx E_0 \frac{\Delta V}{c}$. Отсюда с помощью соотношения неопределенности получаем оценку времени жизни ядра в возбужденном состоянии

$$\tau \approx \frac{hc}{E_0 \Delta V} \approx \frac{6,64 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{129 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

³ Здесь и далее речь идет о массе покоя, с современной точки зрения нет смысла говорить о массе движущегося тела. ⁴ В ядерной физике энергию принято измерять в Эв (электрон-вольтах). 1Эв – энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в 1 вольт.