

Условие

Задача 10-2 Мы мирные люди...

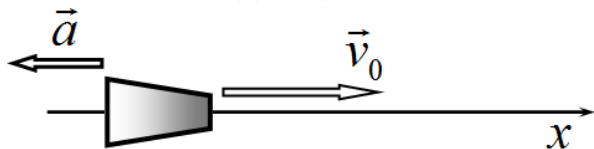
На 3 этапе Республиканской физической олимпиады Вы решали задачу о старте военной ракеты. Сейчас – все войны закончились, мы радуемся мирной жизни. Часто на воздушных парадах самолеты выпускают красивые, цветные шлейфы дыма, раскрашивая ими небосвод. Давайте попытаемся описать поведение этих шлейфов. Упростим ситуацию: действия будут проходить в безвоздушном пространстве. Более того, в первых частях в открытом космосе, где и силами гравитации можно пренебречь. Космический корабль имеет дымовую пушку. Дымовая пушка выпускает частицы дыма с постоянным расходом (т.е. в единицу времени выпускается одно и то же число частиц) с постоянной относительно корабля скоростью u . Можно считать, что все частицы испускаются и остаются в пределах цилиндра с некоторым постоянным диаметром. Если дым испускается неподвижной дымовой пушкой, то концентрация частиц в струе дыма постоянна и равна c_0 .

Корабль снабжен двигателем, который изменяет модуль скорости корабля на величину u за время T .

Удобно ввести собственную систему единиц измерения, выбрав в качестве основных единиц: единицу скорости u и единицу времени T .

Часть 1. Знакомство с новой системой единиц измерения.

1.1 Что является единицей длины во введенной системе? 1.2 Что является единицей ускорения в этой системе единиц?

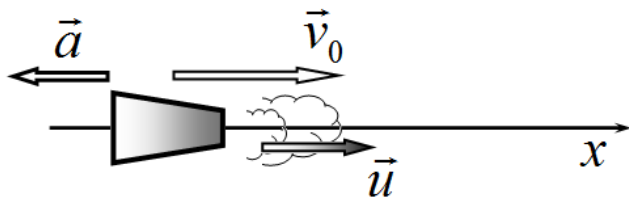


1.3 Пусть корабль движется вдоль прямой линии со скоростью $v_0 = 2u$ и в момент времени $t = 0$ включает двигатель, сообщая кораблю ускорение, направленное в сторону противоположную вектору начальной скорости. Запишите закон движения корабля в используемой системе единиц. Совместим начало отсчета с положением корабля в момент времени $t = 0$.

Если Вам не нравится эта система – решайте далее в обычной системе (пишете многочисленные u, T, a_0 и т.д.)

Часть 2. Открытый космос.

Пусть корабль движется так, как описано в п.1.3 Корабль включает дымовую пушку, направленную в сторону его начальной скорости. Ваша задача – описать дымовой шлейф, выпущенный кораблем.



2.1 Чему будет равна длина шлейфа в момент времени, когда корабль вернется в исходную точку?

Для того, что бы описать концентрацию дыма в шлейфе, можно воспользоваться следующим приемом.

2.2 Запишите функцию $X(t, \tau)$ - координату частицы дыма в момент времени t , если эта

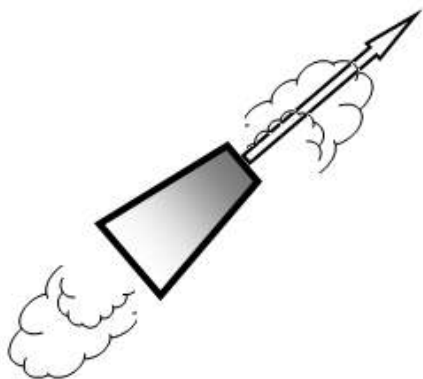
частица была выпущена в момент времени τ . **2.3** Как зная функцию $X(t, \tau)$ найти распределение концентрации дыма в шлейфе в момент времени t ? Укажите те точки, в которых концентрация равна c_0 .

Эта процедура простая, но громоздкая, поэтому в дальнейшем ограничимся качественным (но правильным) описанием распределения частиц дыма в шлейфе.

2.4 Постройте схематический¹ график функции $X(t, \tau)$ в момент времени, когда корабль вернулся в исходную точку и через время $2T$ после этого. **2.5** Нарисуйте схематический график распределения концентрации частиц дыма в эти два момента времени. **2.6** Выполните пункты 2.1, 2.3, 2.4, 2.5 этой части, в том случае когда корабль выпускает дым в противоположную сторону. Расчет проведите только для момента времени, когда корабль вернулся в исходную точку

Часть 3. На новой планете.

После прибытия на вновь открытую планету (к сожалению, для жителей, и к счастью для вас атмосферы на планете нет), аргонавты вселенной (те что прилетели на этом корабле) решили отметить свое прибытие дымовым украшением планеты. Ускорение свободного падения на этой планете в два раза меньше ускорения ракеты. Считайте его постоянным и по модулю и по направлению.



После того, как корабль набрал большую высоту, он стал двигаться постоянной скоростью $2u$ по прямой, направленной под углом 45° к горизонту. Праздновать, так праздновать решил капитан и включил две дымовые пушки – на носу и на корме корабля. **3.1** Считая дымовой шлейф узкой полоской, нарисуйте схематически его форму через время $3T$ после включения дымовых пушек. Опишите использованную вами процедуру расчета этой формы. Для однозначного толкования введите систему координат и опишите форму следа на языке функций (например, $y(x)$, или любым иным однозначным образом). На этом же рисунке укажите траекторию корабля.

— ¹ Схематический график означает, что точно все его точки рассчитывать не надо. Но обязательно надо указать все его существенные особенности: крайние точки, точки экстремумов и разрывов, также следует посчитать значения в трех-четырех точках внутри рассматриваемого интервала.

Решение

Задача 10-2 Мы мирные люди...

Часть 1. Знакомство с новой системой единиц измерения.

1.1 – 1.2 Единицами измерения длины и ускорения являются

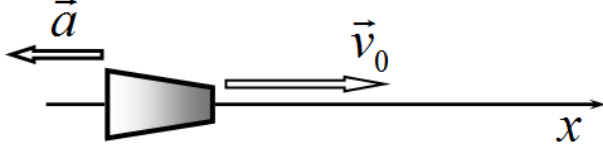
$$l_0 = uT$$

$$a_0 = \frac{u}{T}. \quad (1)$$

Отметим, что в этой системе единиц ускорение корабля всегда по модулю равно 1.

1.3 В традиционной системе единиц закон движения корабля имеет вид

$$x = 2ut - \frac{a_0 t^2}{2} \quad (2)$$



Чтобы перейти в собственную систему единиц, следует проделать замены (штрихами обозначены величины, измеренные в новой системе единиц):

$$t = T \cdot t', \quad x = l_0 x' = uTx', \quad (3)$$

которые приводят к выражению

$$uTx' = 2u \cdot Tt' - \frac{1}{2} \frac{u}{T} (Tt')^2,$$

В котором все параметры сокращаются (штрихи опущены за ненадобностью):

$$x = 2t - \frac{t^2}{2} \quad (4)$$

Часть 2. Открытый космос.

2.1 В этом пункте в последний раз используем обычную систему единиц измерения. Очевидно, что максимальную скорость будут иметь те частицы шлейфа, которые испущены в начальный момент времени, и эта скорость равна $v_0 = 2u + u = 3u$. Скорости частиц, выпущенных позднее, будут меньше, так как ракета тормозит. Следовательно, на максимальное расстояние улетят частицы, испущенные в начальный момент времени. Из закона движения (2) следует, что время, через которое ракета вернется в начальное состояние равно

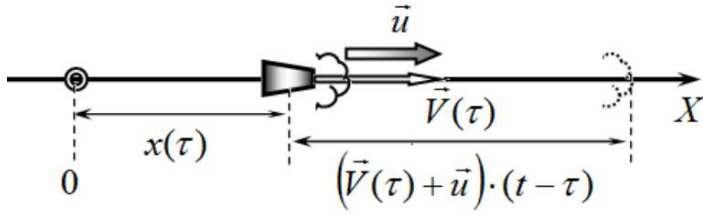
$$t_k = \frac{4u}{a_0} = 4T. \quad (5)$$

Поэтому максимальное удаление частиц шлейфа к моменту возвращения ракеты равно

$$x_{\max} = 3u \cdot 4T = 12uT. \quad (6)$$

В собственной системе единиц: $x_{\max} = 12$. Для того, чтобы найти минимальную координаты частиц шлейфа, рассмотрим положение частиц дыма, испущенных на обратном пути ракеты. Так как направление вылета частиц противоположно скорости ракеты, то они никогда не смогут догнать ракету. Следовательно, минимальная координата частиц шлейфа равна минимальной координате ракеты, т.е. $x_{\min} = 0$ (в любой системе единиц). Таким образом, общая длина шлейфа к моменту возвращения ракеты равна $L = 12uT$.

2.2 Здесь и далее используем собственную систему единиц. Напоминаем, в этой системе ускорение ракеты $a_0 = 1$, скорость вылета частиц дыма $u = 1$.



времени τ (в этот
время $(t - \tau)$ ее

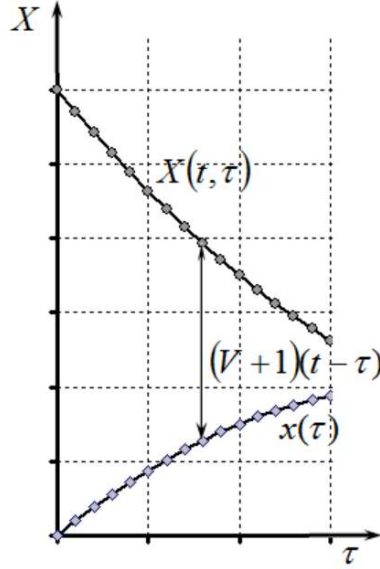
(7)

τ . Таким образом,

(8)

функцию только
едуру построения

сения описывается



Функцию $X(t, \tau)$ - координата частицы дыма в момент времени t , если эта частица была выпущена в момент времени τ , строится простым способом. Пусть закон движения ракеты задан функцией $x(t)$. Тогда частица дыма, испущенная в момент времени τ (в этот момент ее координата $x(\tau)$), за оставшееся время $(t - \tau)$ ее координата изменится на величину равную

$$\Delta x = (v(\tau) + 1)(t - \tau), \quad (7)$$

где $v(\tau)$ - скорость ракеты в момент времени τ . Таким образом, искомая функция имеет вид

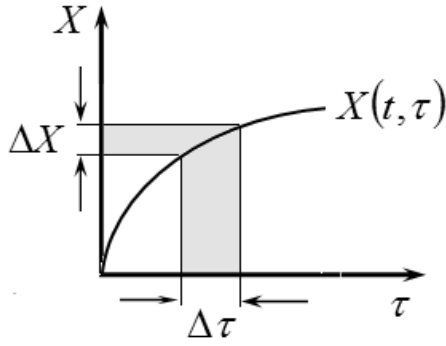
$$X(t, \tau) = x(\tau) + (v(\tau) + 1)(t - \tau). \quad (8)$$

Очевидно, что имеет смысл рассматривать эту функцию только при $\tau \leq t$. Рисунок еще раз иллюстрирует процедуру построения данной функции. В рассматриваемом случае, когда закон движения описывается функцией (4), $v(\tau) = 2 - \tau$, поэтому

$$X(t, \tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (3 - \tau)(t - \tau). \quad (9)$$

Удобно в этой функции выделить полный квадрат:

$$X(t, \tau) = \frac{1}{2}(t + 1 - \tau)^2 - \frac{(t - 2)^2 - 3}{2}. \quad (10)$$



2.3 Построенная функция $X(t, \tau)$ позволяет находить распределение концентрации частиц в шлейфе. Действительно: в малом слое шлейфа толщиной ΔX окажутся частицы, испущенные в соответствующем интервале $\Delta \tau$. Их масса равна $\Delta m = \mu \Delta \tau$, где μ - масса частиц, испускаемых дымовой пушкой в единицу времени. Поэтому концентрация частиц в слое

$$c = \frac{\Delta m}{S \Delta X} = \frac{\mu \Delta \tau}{S \Delta X}, \quad (11)$$

где S - площадь поперечного сечения шлейфа. При неподвижной дымовой пушке, частицы, испущенные за время Δt , окажутся в слое толщиной $u \Delta t$, поэтому их концентрация определяется формулой:

$$c_0 = \frac{\mu \Delta t}{S u \Delta t} = \frac{\mu}{S u}. \quad (12)$$

Наконец, разделим равенство (11) на равенство (12), в результате чего получим (кроме того, в общем случае следует взять модули интервалов – нам важны только длины отрезков)

$$c = c_0 \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|. \quad (13)$$

В собственной системе единиц имеет смысл выбрать в качестве единицы концентраций использовать c_0 (или, что равносильно, положить $c_0 = 1$). Тогда концентрация частиц в дымовом следе выражается очень просто:

$$c = \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|^{-1}. \quad (14)$$

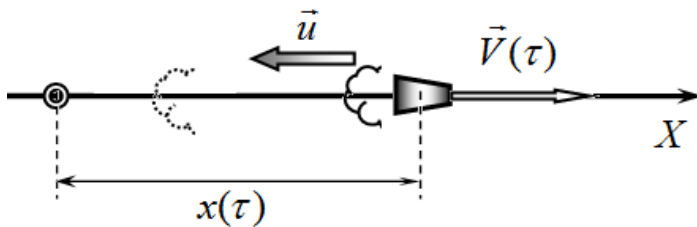
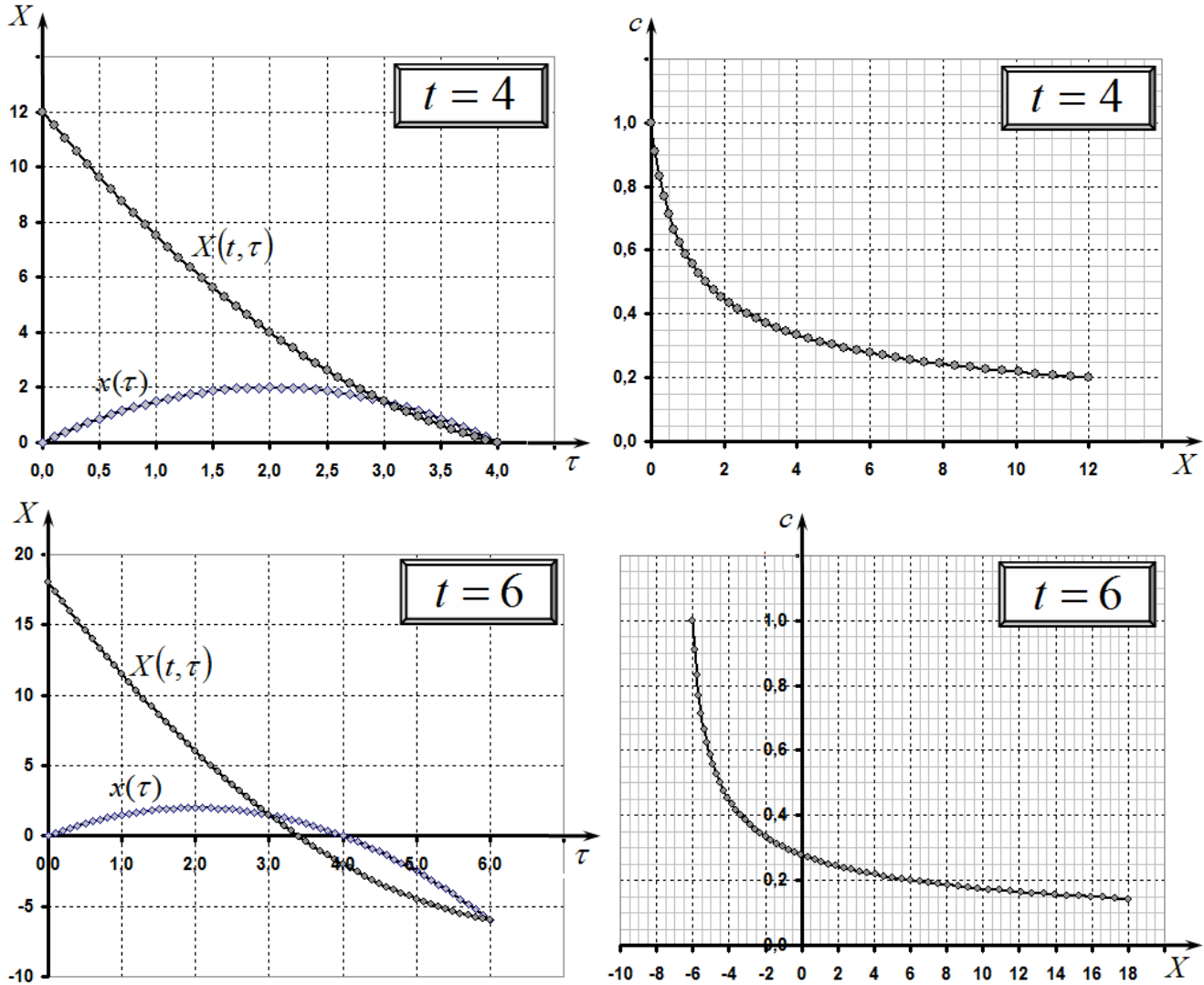
Правда, эта формула определяет концентрацию, как функцию τ . Чтобы перейти к зависимости $c(X)$ можно использовать один из возможных путей: - выразить τ через X из функции $X(t, \tau)$ и подставить в формулу (14); - найти обратную функцию к $X(t, \tau)$ - $\tau(X)$ и вычислить ее производную; - рассматривать выражения (14) и функцию $X(t, \tau)$ как пару функций, определяющих концентрацию $c(X)$ параметрически (где в качестве параметра выступает τ). Отметим, что все эти способы пригодны, если функция $X(t, \tau)$ является монотонной, когда существует обратная к ней функция. В противном случае, необходим дополнительный анализ.

2.4 – 2.5 Для построения схематического графика функции $X(t, \tau)$ можно воспользоваться следующей процедурой: - построить график функции $x(\tau)$: банальная парабола, ветви вниз, нули при $t = 0$ и $t = 4$, максимум при $t = 2$, при этом $x = 2$; - функция $X(t, \tau)$ также парабола, ветви вверх, экстремум вне рассматриваемого интервала (в точке $\tau = t = 1$), при $\tau = 0$ $X = 3t$, при $\tau = t$ $X = x(t)$; - можно «найти» еще одну точку: при $\tau = 3$ скорость

частиц дыма равна нулю. Поэтому в этой точке тоже $X = x(t)$. Используя вид функции (10), не сложно найти

$$\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = t + 1 - \tau. \quad (15)$$

Для построения зависимости концентрации от координаты следует учесть следующее: - пределы изменения аргумента в пределах изменения функции $X(t, \tau)$; - функция монотонно убывающая, выпуклостью вниз; - при $X = X_{\max}$ (т.е. при $\tau = 0$), как следует из формулы (15) $c = \frac{1}{t+1}$; - при $X = x(\tau)$ (при $\tau = t$) $c = 1$. Можно также подсчитать значения и в некоторых промежуточных точках. Графики этих функций показаны на рисунках.



2.6 Первые шаги решения этой части задачи аналогичны рассмотренным ранее.

Для построения функции $X(t, \tau)$ необходимо учесть, что вектор скорости вылетающего дыма направлен в противоположную сторону, поэтому следует записать

$$X(t, \tau) = x(\tau) + (v(\tau) - 1)(t - \tau). \quad (16)$$

При законе движения (4) эта функция задается формулой

$$X(t, \tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (1 - \tau)(t - \tau). \quad (17)$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$X(t, \tau) = \frac{1}{2}(t - 1 - \tau)^2 - \frac{(t - 2)^2 - 3}{2}. \quad (18)$$

На нас интересует эта функция при $t = 4$.

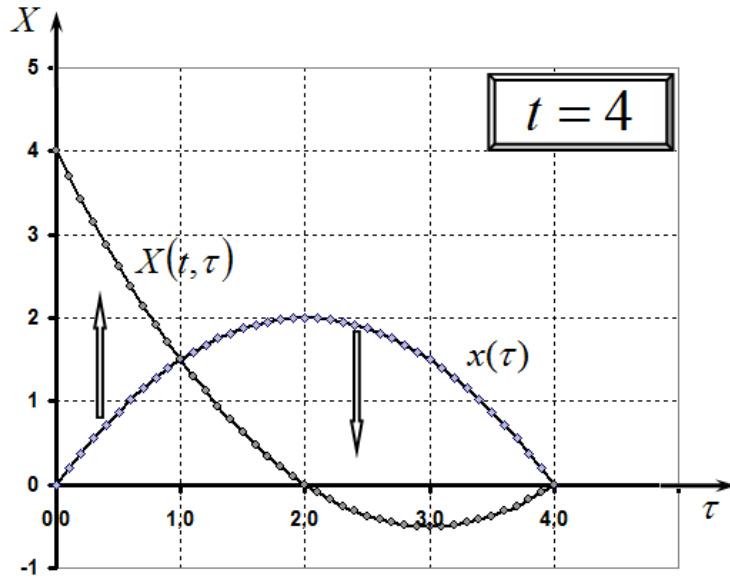


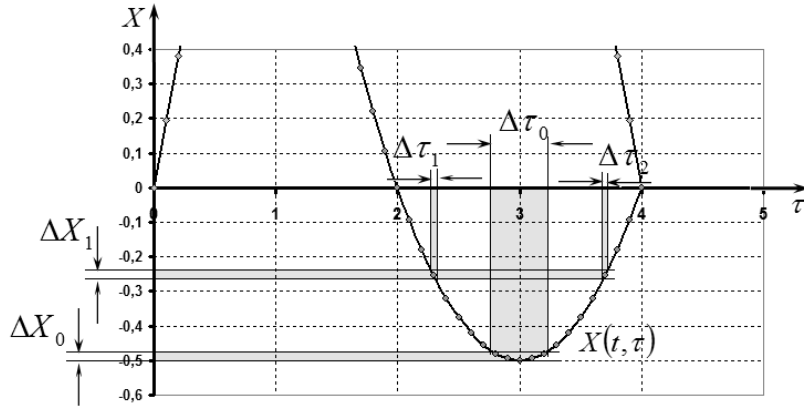
График этой функции также является параболой, только с одной существенной особенностью: ее минимум попадает внутрь рассматриваемого интервала $\tau \leq t$! Для построения графика этой функции можно использовать следующие точки: - при $\tau = 0$ $X = t = 4$; - при $\tau = t = 4$ $X = x(t) = 0$; - вершина параболы: $\tau = 3$, $X = -0,5$. Скорость вылетающих частиц зависит от времени по закону $v - u = 1 - \tau$. Поэтому при $\tau = 1$ эта скорость равна нулю (частицы, вылетевшие в этот момент, покоятся) поэтому $X(t, 1) = x(1)$.

Для наглядности, на рисунке указаны стрелки, указывающие направление, в котором движется шлейф после испускания. Так при $\tau < 1$ скорость ракеты больше скорости испускания частиц дыма, поэтому шлейф следует за ракетой, отставая от нее. При $\tau > 1$ частицы шлейфа движутся в отрицательном направлении выбранной оси.

Рисунок показывает, что при $X > 0$ координата однозначно определяется временем испускания. В этой области для расчета распределения концентрации частиц в шлейфе можно использовать процедуру, рассмотренную ранее. Здесь (при $X > 0$ или $0 < \tau < 2$) концентрация определяется формулой:

$$c = \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|^{-1} = \frac{1}{|t - 1 - \tau|} = \frac{1}{3 - \tau} \quad (19)$$

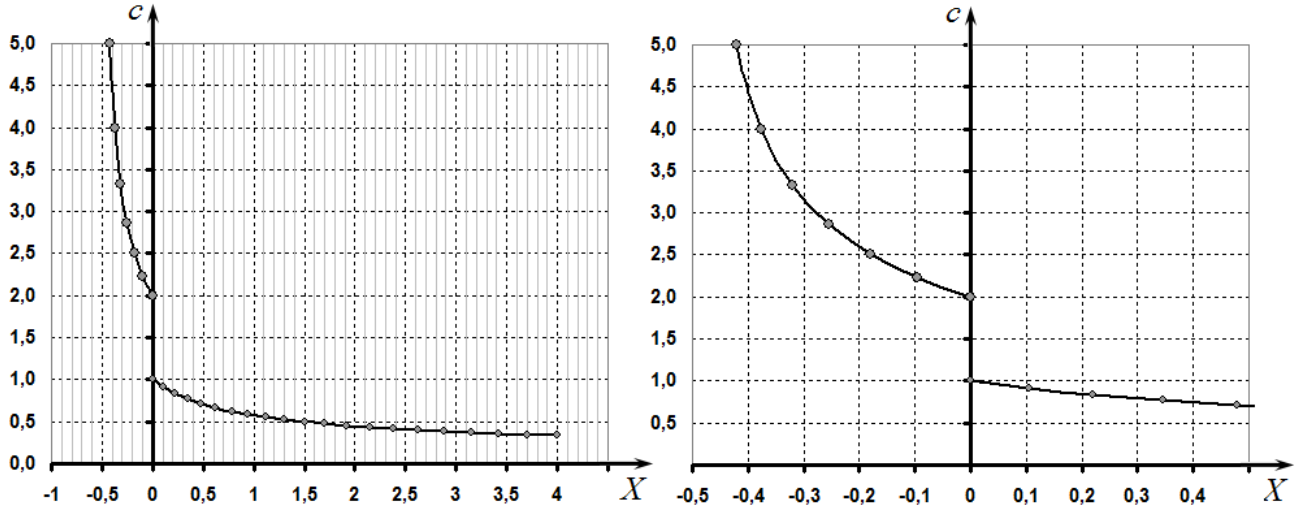
В области $X > 0$ одному значению X соответствует два значения τ .



Рассмотрим эту область подробнее. Во-первых, одному малому интервалу ΔX_1 соответствует два малых интервала $\Delta \tau_1$ и $\Delta \tau_2$. Физический смысл этой двузначности следующий: в рассматриваемый момент времени в эту полосу ΔX_1 попадают частицы, испущенные в два интервала времени $\Delta \tau_1$ и $\Delta \tau_2$. Поэтому для расчета концентрации частиц внутри этой полосы необходимо просуммировать обе порции частиц. Легко видеть, что обе эти порции создают одинаковую концентрацию, поэтому в этом интервале концентрацию следует удвоить (при $X < 0$ или $2 < \tau < 3$):

$$c = \frac{2}{3 - \tau} \quad . \quad (20)$$

Наконец, при $X = -0,5$ (или при $\tau = 3$) концентрация формально стремится к бесконечности. Рисунок поясняет этот вывод: малому интервалу ΔX_0 соответствует гораздо больший интервал $\Delta \tau_0$. Формально в этой точке $\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = 0$. Физический смысл этого парадоксального, на первый взгляд, результата понятен: в этот слой попадают частицы, испущенные в течение достаточно длительного промежутка времени. График зависимости концентрации от координаты показан на рисунке. Также показан этот же график вблизи $X = 0$ в увеличенном масштабе.

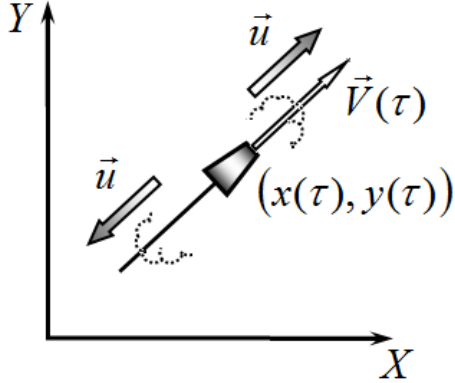


Часть 3. На новой планете.

Эта часть является двумерным развитием одномерной задачи предыдущей части. Необходимо найти координаты частицы в момент времени t , если она была испущена в момент времени τ . Процедура такого построения аналогична той, которую мы использовали в предыдущей части. Так как ракета движется равномерно с постоянной скоростью $2u$, то закон ее движения

имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos 45^\circ \cdot t = \sqrt{2}t \\ y(t) = 2 \cos 45^\circ \cdot t = \sqrt{2}t \end{cases} \quad (21)$$



После того, как частицы испущены (со скоростью u) далее они движутся с постоянным ускорением равным $\frac{a_0}{2}$, направленным вниз. В собственной системе единиц координаты частиц, испущенных в момент времени τ , в момент t будут равны:

$$\begin{cases} X(t, \tau) = \sqrt{2}\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) \\ Y(t, \tau) = \sqrt{2}\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) - \frac{(t-\tau)^2}{4} \end{cases} \quad (21)$$

Знак «плюс» соответствуют частицам, испущенным по направлению движения ракеты, знак «минус», частицам, испущенным в противоположном направлении. В данном случае можно получить явное выражение для функции, описывающей шлейф дыма. Для этого в уравнениях (21) следует избавиться от τ . Заметим, что

$$Y = X - \frac{(t - \tau)^2}{2}. \quad (22)$$

Поэтому достаточно из первого уравнения получить выражение для $(t - \tau)$. Проведем эту процедуру.

$$\begin{aligned} X(t, \tau) &= \sqrt{2}\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) \Rightarrow \\ \frac{X}{\sqrt{2}} &= -(t - \tau) + t + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) = t \pm \frac{1}{2}(t - \tau) \Rightarrow \\ (t - \tau) &= \mp \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - t\right) \end{aligned}$$

Полученное выражение подставляем в формулу (22) и сразу подставим требуемое значение $t = 3$

$$Y = X - \frac{1}{2} \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - 3 \right)^2. \quad (23)$$

поразительно, но оба шлейфа описываются одной функцией! Но они отличаются диапазонами изменения аргумента. Далее найдем, в каких пределах изменяются координаты шлейфа. При $\tau = 0$ $X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}$, $X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. При $\tau = t$ $X_+ = X_- = 3\sqrt{2}$.

Таким образом, форма шлейфа имеет вид параболы, описываемой уравнением (23), при изменении аргумента X в пределах $X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}$, $X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Гораздо быстрее эту задачу можно решить, если связать систему отсчета с кораблем. Эта система отсчета инерциальная. В этой системе отсчета форма шлейфа совпадает с траекторией частиц. Закон движения частиц имеет вид

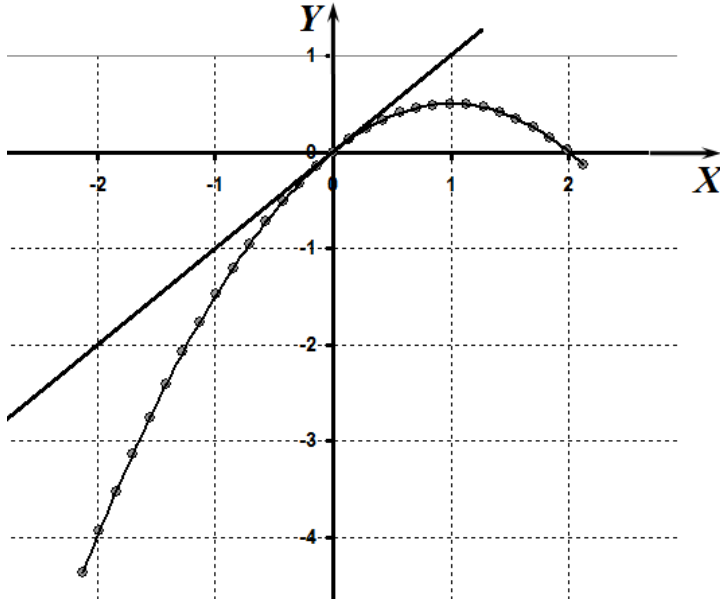
$$\begin{cases} X = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\tau \\ Y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\tau - \frac{\tau^2}{4} \end{cases} \quad (24)$$

Исключая из системы τ , получим уравнение траектории в явном виде

$$\tau = \sqrt{2}X \Rightarrow Y = X - \frac{X^2}{2}. \quad (25)$$

При изменении X в пределах $\pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

График этой функции в указанных пределах показан на рисунке. Прямая линия на рисунке есть траектория движения корабля.



Дополнение (необязательное).

Заметим, что траектории движения всех частиц одинаковы, только начинаются из разных точек. Поэтому можно построить эти траектории. На каждой из них отметить точки, в которых находится частица в равноотстоящие моменты времени. На каждой траектории необходимо выбрать точки соответствующие времени движения от момента испускания до момента, когда наблюдается след ($t - \tau$). Множество этих точек и будет представлять форму шлейфа. На рисунке показано такое построение. Разными значками отмечены точки шлейфа в разные моменты времени.

