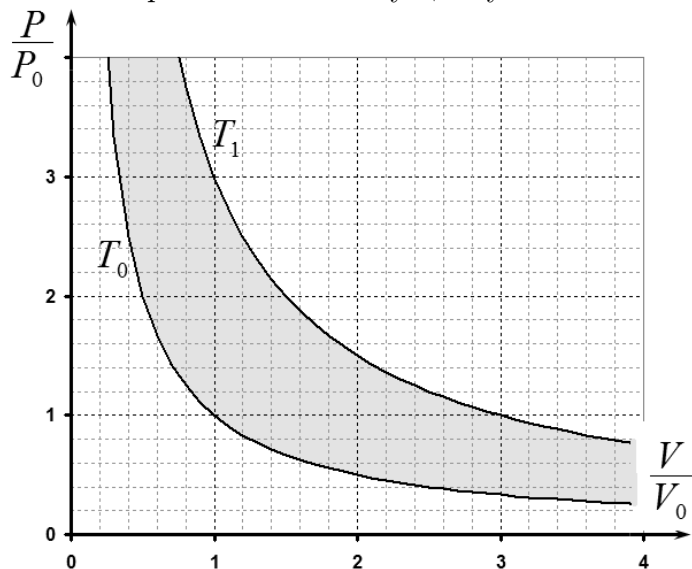


Условие

Задача 11-1 Почему цикл Карно лучше других?

Все знают, что цикл Карно лучше всех других циклов! Но ни один реальный тепловой двигатель не работает по этому циклу. Так в чем же преимущество этого цикла?



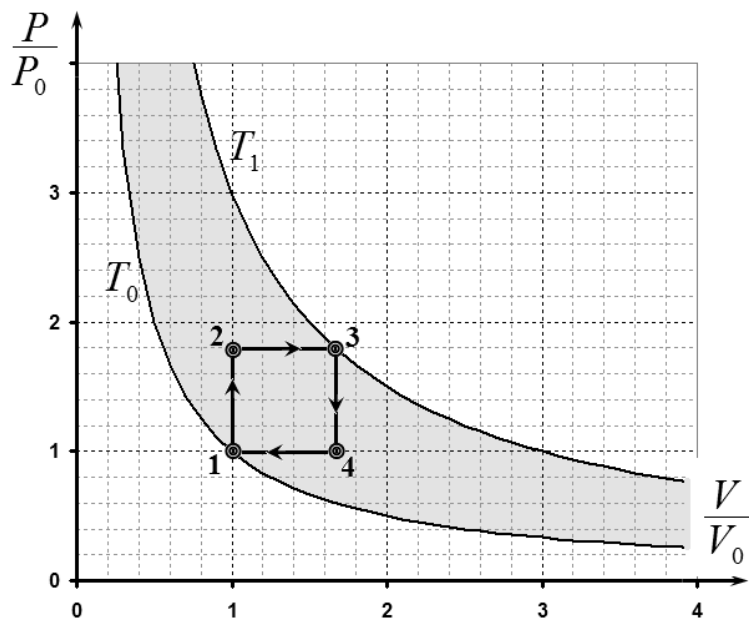
В данной задаче Вам предстоит рассмотреть несколько циклов, рабочим телом которых является один моль одноатомного идеального газа. Все циклы лежат в одном и том же температурном интервале от минимальной температуры T_0 до максимальной T_1 . Иными словами, на диаграмме (P, V) располагаются внутри полосы между двумя изотермами. Обратите внимание, что по осям координат отложены относительные величины $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$, где (P_0, V_0) - параметры газа в некотором состоянии. Все процессы следует считать равновесными. Вам предстоит рассчитать КПД всех циклов и проанализировать их зависимость от отношения температур $\beta = \frac{T_1}{T_0}$. Поверьте, КПД этих зависит только от этого параметра.

Подсказка. Уравнение адиабаты идеального газа имеет вид

$$PV^\gamma = \text{const},$$

где γ - показатель адиабаты, для одноатомного газа $\gamma = \frac{5}{3}$.

Для облегчения вашей работы (и работы жюри!) Вам выдается отдельный бланк с подписанными и оцифрованными осями, на котором Вы должны построить требуемые графики. Не забудьте вложить его в вашу тетрадь!



1. Квадратный цикл. На приведенной диаграмме цикл имеет вид квадрата. Начальное состояние газа (P_0, V_0) - точка 1. Цикл состоит из двух изобар и двух изохор. 1.1 Рассчитайте КПД этого цикла. Рассчитайте предельное значение КПД при $\beta \rightarrow \infty$. 1.2 Постройте график зависимости КПД этого цикла от отношения минимальной к максимальной температуре² $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\beta}$. График построьте на отдельном бланке (диаграмма 1).

² Эта зависимость более удобна, так как β изменяется от единицы до бесконечности, а обратная величина β^{-1} от единицы до нуля.

2. Треугольный цикл.

На приведенной диаграмме цикл имеет вид прямоугольного треугольника. Начальное состояние газа (P_0, V_0) - точка 1. 2.1 Рассчитайте КПД этого цикла. Рассчитайте предельное значение КПД при $\beta \rightarrow \infty$. 2.2 Постройте график зависимости КПД этого цикла от отношения минимальной к максимальной температуре $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\beta}$.

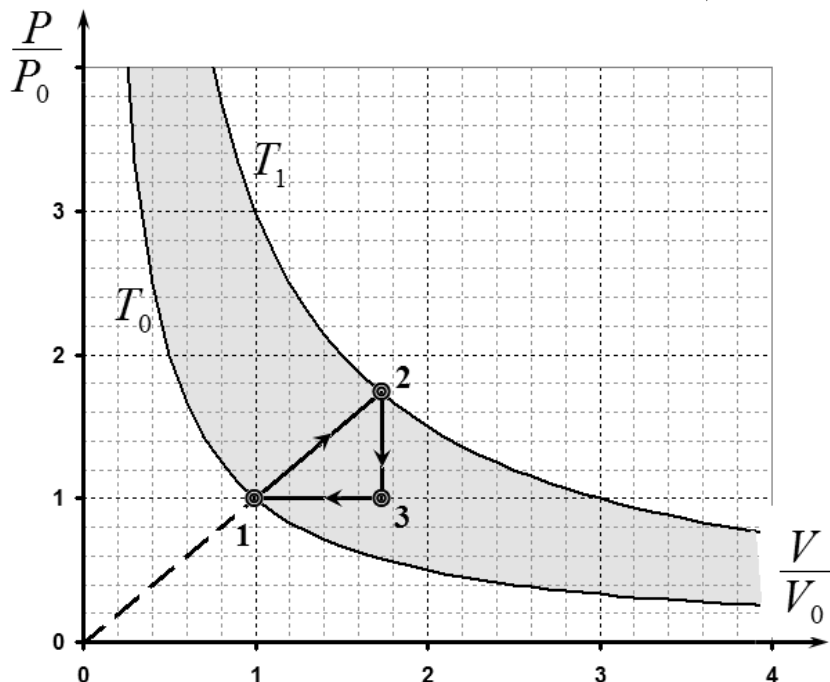


График постройте на отдельном бланке (диаграмма 1).

3. Криволинейно-треугольный цикл. Цикл состоит из изохоры 1-2, адиабаты 2-3, изобары 3-1. Начальное состояние газа (P_0, V_0) - точка 1. 3.1 Рассчитайте КПД этого цикла. Рассчитайте предельное значение КПД при $\beta \rightarrow \infty$. 3.2 Постройте график зависимости КПД этого цикла от отношения минимальной к максимальной температуре $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\beta}$.

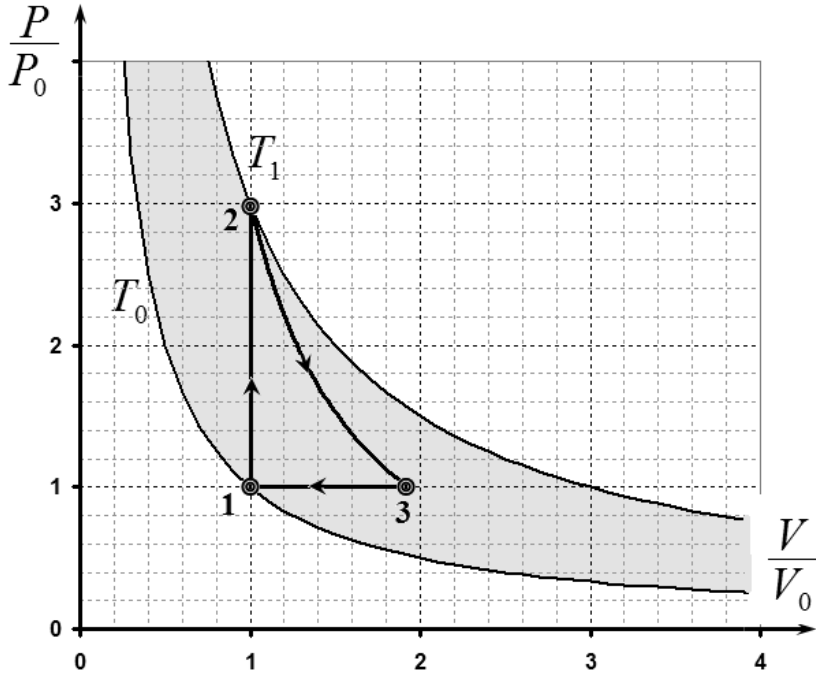


График постройте на отдельном бланке (диаграмма 1).

4. Цикл Карно. 4.1 Постройте цикл Карно (не схематически, а точно), если заданы две точки этого цикла 1 и 3, лежащие на изотермах. 4.2 Постройте график зависимости КПД этого цикла от отношения минимальной к максимальной температуре $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\beta}$.

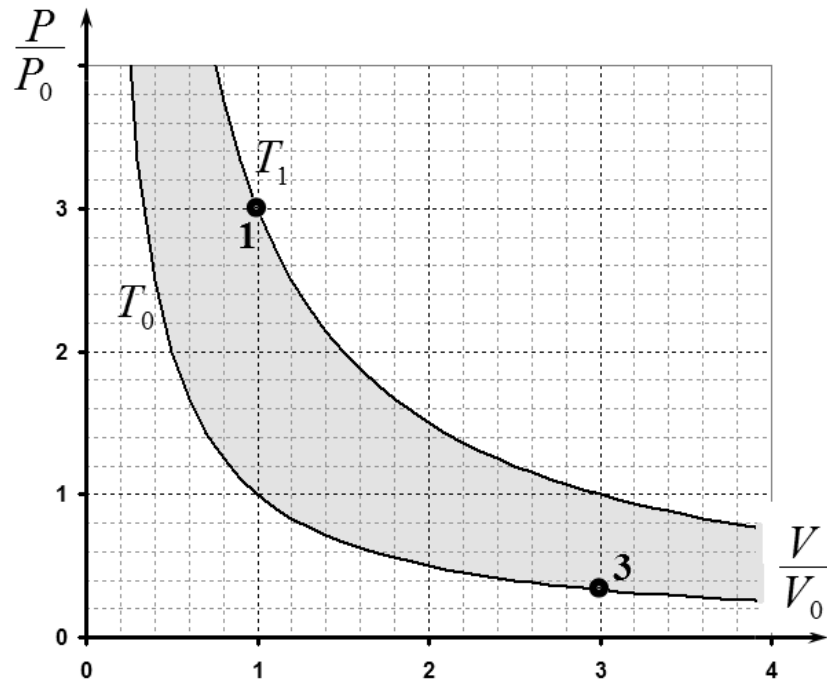
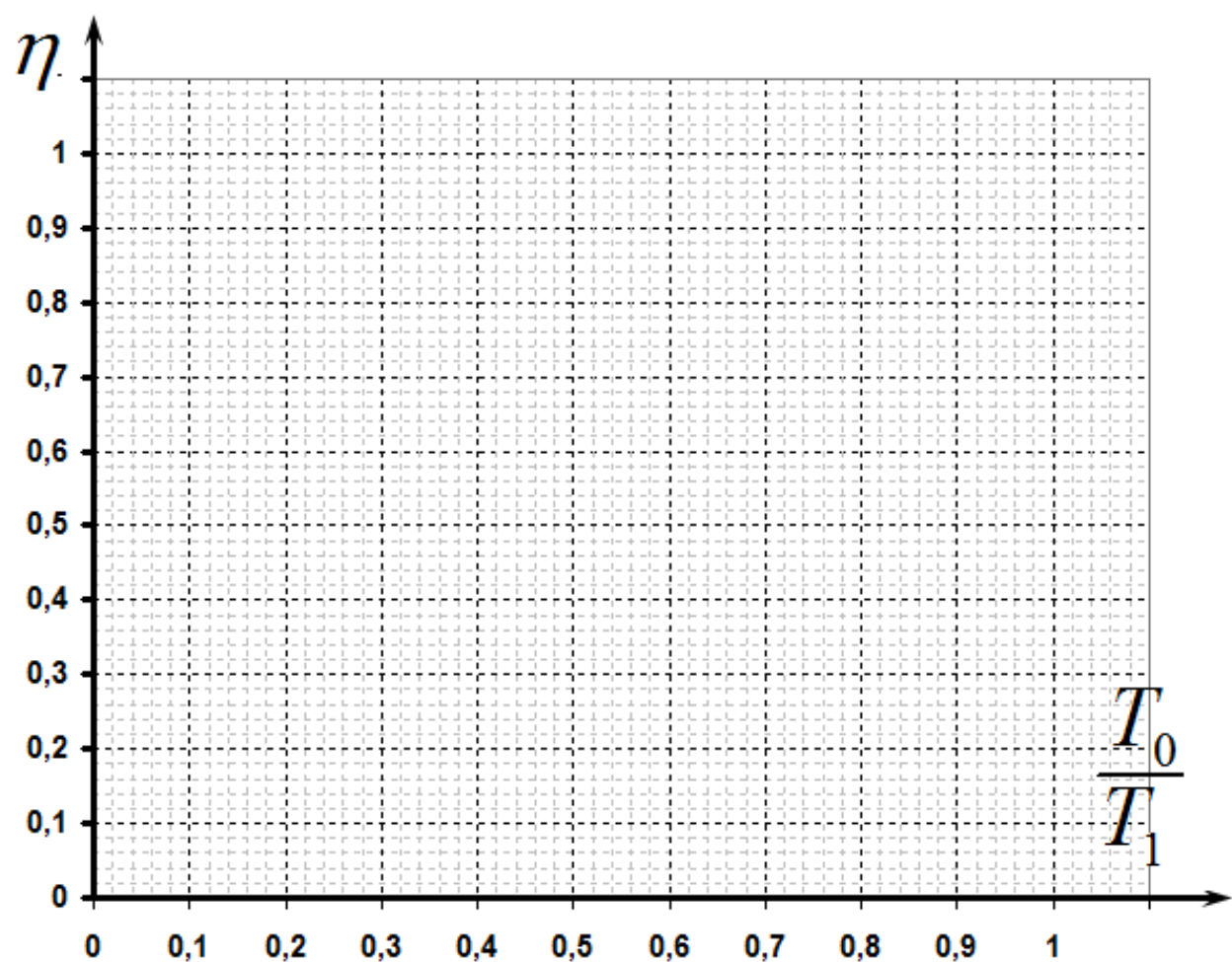


График постройте на отдельном бланке (диаграмма 2).

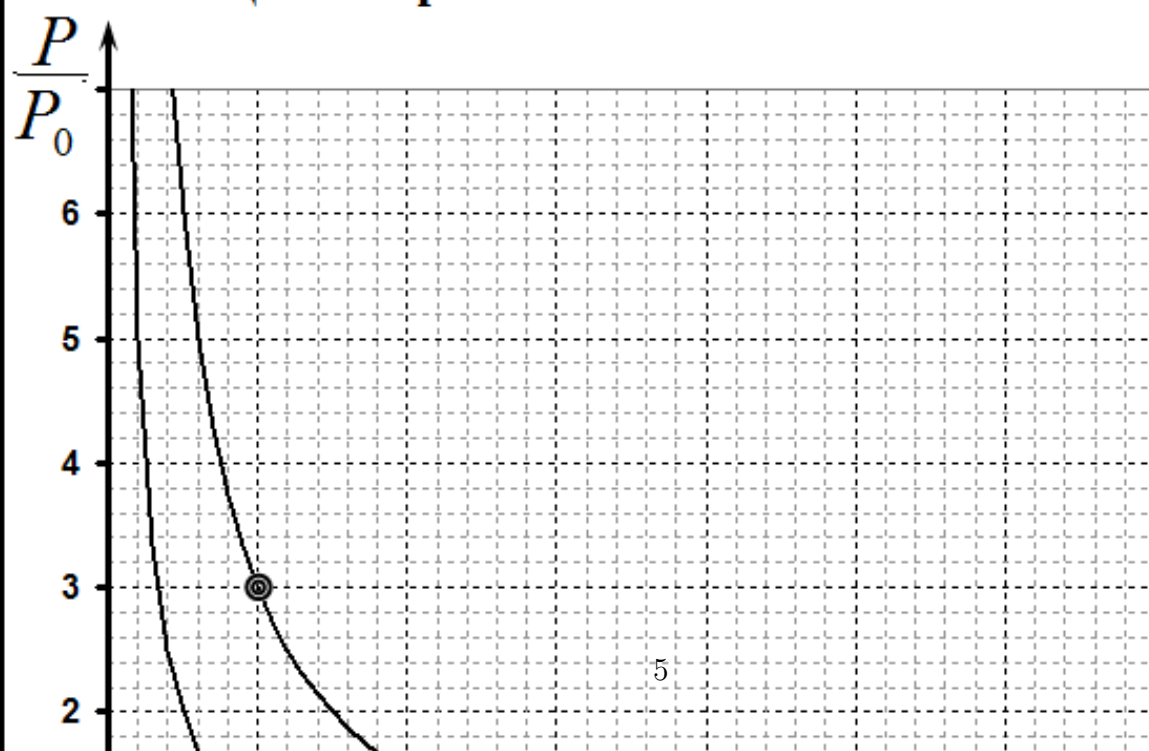
5. Заключение. Четко и кратко сформулируйте, в чем заключается преимущество цикла Карно.

Бланк задачи 11-1

Зависимости КПД от отношения температур

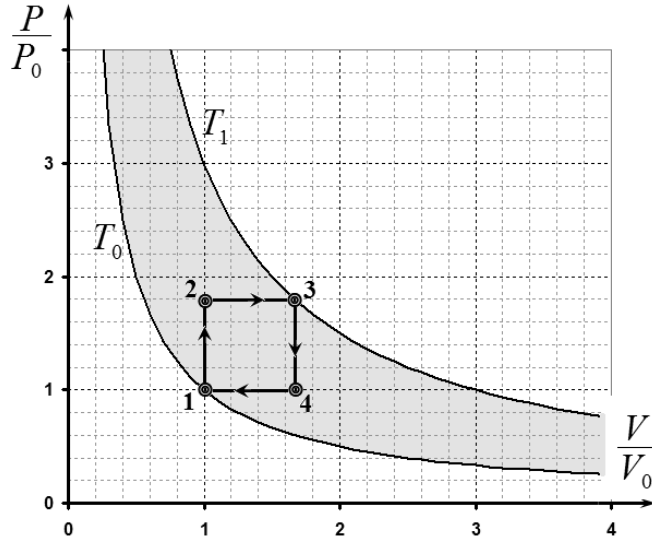


Цикл Карно



Решение

Задача 11-1 Почему цикл Карно лучше других?



1. Квадратный цикл.

Так как цикл «квадратный», то объем и давление газа возрастают в пределах цикла в одно и тоже число раз. Их произведение (пропорциональное температуре) возрастает в β раз, поэтому максимальные объем и давление (в состоянии 3) находятся по формулам

$$V_3 = \sqrt{\beta}V_0, \quad P_3 = \sqrt{\beta}P_0 \quad (1)$$

Газ получает теплоту на участках 1-2 и 2-3.

Суммарное количество теплоты, полученное газом равно

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{2}RT_0 (\sqrt{\beta} - 1) + \frac{5}{2}RT_0 (\beta - \sqrt{\beta}) = \\ &= \frac{RT_0}{2} (\sqrt{\beta} - 1) (3 + 5\sqrt{\beta}) \end{aligned} \quad (2)$$

Работа совершенная газом за цикл численно равна площади цикла:

$$A = P_0V_0 (\sqrt{\beta} - 1)^2 = RT_0 (\sqrt{\beta} - 1)^2. \quad (3)$$

Следовательно, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{RT_0 (\sqrt{\beta} - 1)^2}{\frac{RT_0}{2} (\sqrt{\beta} - 1) (3 + 5\sqrt{\beta})} = \frac{2 (\sqrt{\beta} - 1)}{(3 + 5\sqrt{\beta})}. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, при $\beta = 1$ КПД обращается в нуль, а при возрастании β стремится к предельному значению $\bar{\eta} = \frac{2}{5} = 0,4$. Для построения графика полученную зависимость удобно представить в виде:

$$\eta = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{\beta}} + 5\right)}. \quad (5)$$

График этой зависимости показан на бланке (кривая - 1)

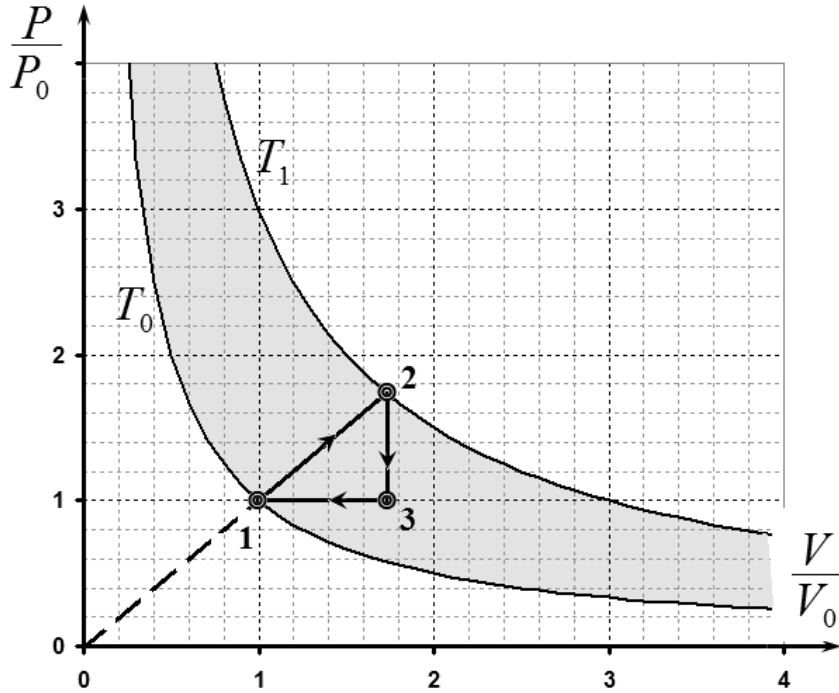
2. Треугольный цикл

Расчет КПД проводится аналогично. Газ получает теплоту только на участке 1-2. По первому закону термодинамики, это количество теплоты равно

$$Q_1 = \frac{3}{2}RT_0(\beta - 1) + \frac{1}{2}P_0(1 + \sqrt{\beta})V_0(\sqrt{\beta} - 1) = 2P_0V_0(\beta - 1)$$

Работа, совершенная за цикл:

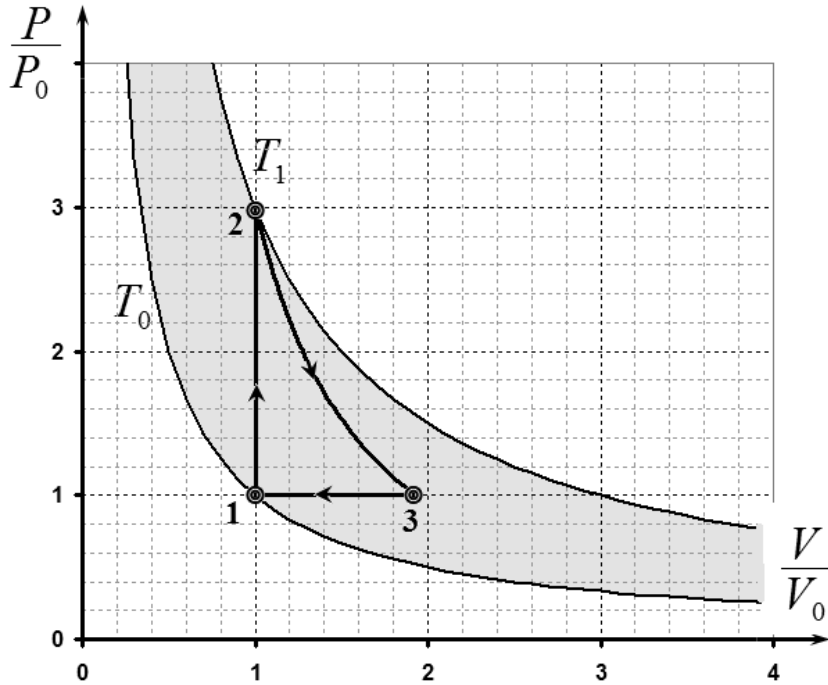
$$A = \frac{1}{2}P_0V_0(\sqrt{\beta} - 1)^2;$$



КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^2}{2(\beta - 1)} = \frac{(\sqrt{\beta} - 1)}{3(\sqrt{\beta} + 1) + (\sqrt{\beta} - 1)} = \frac{\sqrt{\beta} - 1}{2(\sqrt{\beta} + 1)}.$$

Предельное значение КПД в этом случае равен 0,5. Немного лучше!



3. Криволинейно-треугольный цикл.

В данном случае газ получает теплоту на участке изохорного расширения 1-2. Это количество теплоты равно

$$Q_1 = \frac{3}{2}RT_0(\beta - 1).$$

Чтобы не считать работу (т.е. не интегрировать адиабату), найдем количество теплоты, отданное газом на участке 3-1. Для этого следует определить температуру газа в состоянии 3. Точки 2 и 3 соединены адиабатой, причем нам известны значения давлений в крайних точках. Поэтому запишем уравнение адиабатного процесса в координатах (P, T) . Из уравнения состояния идеального газа выразим $V = \frac{RT}{P}$ и подставим в уравнение адиабаты

$$P \left(\frac{T}{P} \right)^\gamma = \text{const} \Rightarrow P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{const}.$$

Показатель степени в этом уравнении равен $-\frac{2}{5}$. Записывая это уравнение для состояний 2 и 3, получим

$$(\beta P_0)^{-\frac{2}{5}} \beta T_0 = P_0^{-\frac{2}{5}} T_3 \Rightarrow T_3 = T_0 \beta^{\frac{3}{5}}.$$

Теперь можно записать выражения для количества отданной теплоты:

$$Q_2 = \frac{5}{2}RT_0 \left(\beta^{\frac{3}{5}} - 1 \right).$$

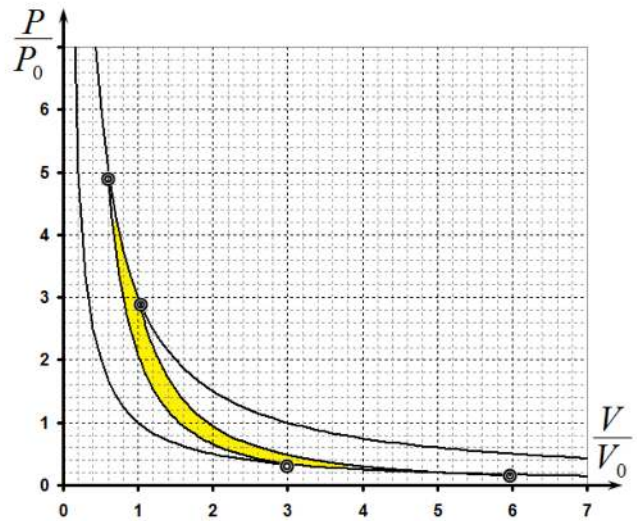
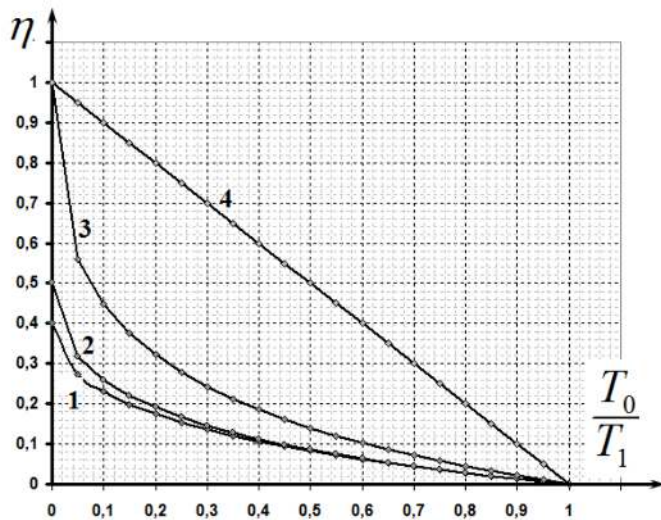
Наконец, формула КПД обретает вид

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{5 \left(\beta^{\frac{3}{5}} - 1 \right)}{3(\beta - 1)}.$$

В этом цикле при возрастании β КПД стремится к 1. График этой зависимости изображается кривой 3 на бланке.

4. КПД цикла Карно, как известно равен $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_0}$, график этой зависимости – прямая линия, идущая выше всех построенных кривых.

Таким образом, при заданных максимальных и минимальных температурах цикл Карно имеет максимально возможный КПД. Ну а рисунок цикла показан на бланке, как видите, его вид весьма далек от традиционных «ромбиков», которые обычно рисуют в учебниках!



², β , Эта зависимость более удобна так как изменяется от единицы до бесконечности а обратная $\beta - 1$ величина от единицы до нуля.