

## Условие

### Задача 11-2 Хорошо, что не экспериментальная задача!

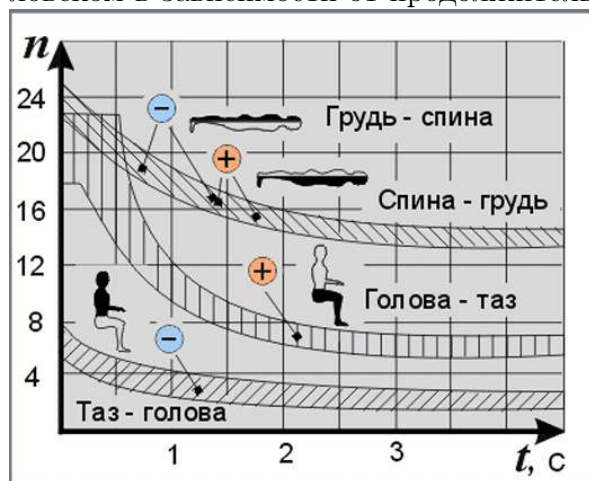
#### Введение. Перегрузки.

Под воздействием перегрузок (при ускорении и торможении) в человеческом организме происходит утяжеление всех его органов, деформация скелета, отлив крови от одних органов и прилив ее к другим.

Мерой перегрузки (или просто перегрузкой) называется отношение ускорения тела к ускорению свободного падения  $n = \frac{a}{g}$

Величина перегрузки, которую может перенести человек, зависит от направления перегрузки, от времени ее воздействия и темпа нарастания, а также от общей и физической подготовки. Легче переносятся перегрузки в направлении «спина - грудь», «грудь - спина» и труднее - «таз - голова»

\*На рисунке показаны предельные перегрузки в различных направлениях, переносимые человеком в зависимости от продолжительности их действия  $t^*$



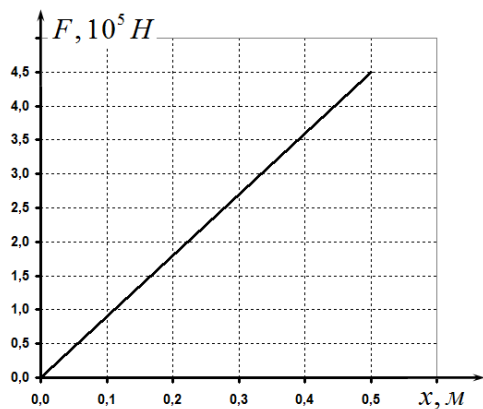
Уменьшают перегрузку в автомобилях при экстренных ситуациях различными способами: подбором необходимой динамической емкости ремней безопасности, части кузова делают деформируемыми с постепенным увеличением жесткости при приближении к салону с помощью постепенного увеличения сечения элементов конструкции, толщины стенок и их количества, размещением внутри салона упругих и мягких элементов и т. д.

В данной задаче Вам необходимо дать количественное описание эксперимента по изучению безопасности водителя и пассажиров автомобилей при столкновениях.

Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10 \frac{м}{с^2}$

#### Часть 1. Лобовое столкновение автомобиля с упругой преградой.

Для удешевления экспериментов автомобиль сталкивается с упругой преградой, при этом сам автомобиль не разбивается и может быть использован в других экспериментах.



Автомобиль массы  $M = 1,0 \cdot 10^3$  кг ударяется об упругую преграду.

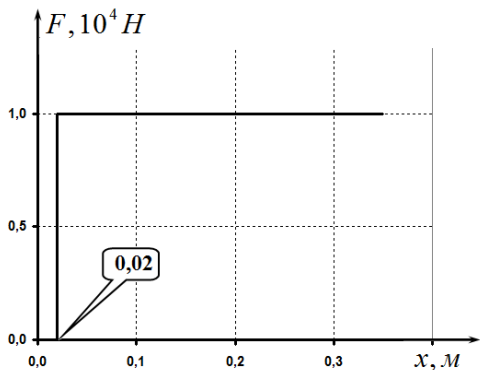
На автомобиль со стороны преграды при соударении действует упругая сила, график зависимости которой от деформации преграды показан на рисунке. До полной остановки автомобиля прошел путь равный  $S = 0,50$  м

1.1 Определите скорость автомобиля перед столкновением.

1.2 Определите время торможения автомобиля и максимальную перегрузку, которую испытывает автомобиль.

### Часть 2. Манекен пристегнут к сидению ремнем безопасности.

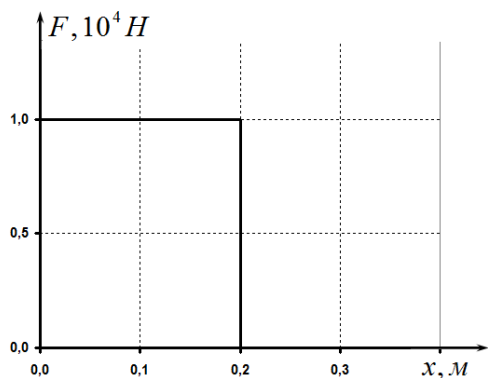
На месте водителя находится манекен (не садить же живого человека) массы  $m = 75$  кг. Манекен пристегнут ремнем безопасности. Со стороны ремня на манекен действует сила, зависящая от смещения манекена по закону, показанному на рисунке: при смещении манекена на расстояние меньшее 2 см этой силой можно пренебречь, при большем смещении эту силу можно считать постоянной (так как ремень вытягивается из держателя).



2.1 Определите через какое время после начала столкновения ремень безопасности начнет тормозить манекен (время срабатывания) и перегрузку автомобиля, при которой срабатывают ремни безопасности.

2.2 Определите перегрузку, которую испытывает водитель-манекен.

### Часть 3. Манекен не пристегнут.



В следующем эксперименте манекен не пристегнут, поэтому во время такого же столкновения автомобиля с преградой, наталкивается на энергопоглощающую рулевую колонку. Расстояние от груди автомобиля до рулевой колонки  $L = 30$  см. Со стороны колонки на манекен действует сила, зависимость которой от деформации колонки показана на рисунке: эта сила постоянна до смещения в 20 см, после чего колонка ломается. После того, как рулевая колонка разрушилась, манекен продолжает свободное движение, и, пролетев расстояние  $d = 20$  см, сталкивается с лобовым стеклом. За время этого столкновения центр масс манекена сместился еще  $\Delta x = 5,0$  см (из-за деформации стекла, головы и шейных позвонков) после чего окончательно остановился.

3.1 Определите через какое время после начала столкновения автомобиля манекен ударится о рулевую колонку.

3.2 Определите, с какой скоростью и через какое время после столкновения автомобиля с преградой манекен ударяется о стекло.

3.3 Определите на сколько времени задерживает встречу манекена с лобовым стеклом рулевая колонка.

3.4 Определите перегрузки, которую испытывает манекен, при столкновении с рулевой колонкой автомобиля и лобовым стеклом.

На месте пассажира находится еще один такой же манекен. Перед ним рулевой колонки нет, поэтому он без каких либо препятствий долетает до лобового стекла (расстояние до которого, такое же, как и манекена-водителя. Ударяясь о стекло, он также еще смещается на  $\Delta x = 5,0$  см.

3.5 Определите перегрузку, которую испытывает этот манекен.

#### Часть 4. Подведение итогов.

4.1 Постройте графики зависимостей перегрузок автомобиля, обоих манекенов от времени.

#### Решение

**Задача 11-2 Хорошо, что не экспериментальная задача!**

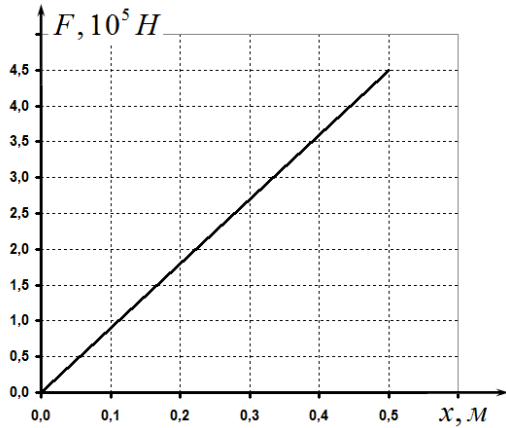
#### Часть 1. Лобовое столкновение автомобиля с упругой преградой.

Так как сила, действующая на автомобиль, пропорциональна смещению автомобиля, то она может быть описана функцией (закон Гука)

$$F = kx. \quad (1)$$

Коэффициент упругости легко может быть найден из графика

$$k = \frac{4,5 \cdot 10^5 \text{ Н}}{0,5 \text{ м}} = 9,0 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (2)$$



Скорость автомобиля перед столкновением находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{kS^2}{2} \Rightarrow v_0 = S\sqrt{\frac{k}{M}} = 0,50\sqrt{\frac{9,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^3}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

Закон движения автомобиля находится из уравнения второго закона Ньютона

$$Ma = -kx, \quad (4)$$

которое является уравнением гармонических колебаний. Будем считать, что в момент начала столкновения  $t = 0$ , координата автомобиля равна  $x = 0$ , а начальная скорость нами найдена. С учетом начальных условий, закон движения имеет вид

$$x = S \sin \omega t, \quad (5)$$

где круговая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 30 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

Время торможения равно четверти периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ с} = 52 \text{ мс}. \quad (7)$$

Зависимость скорости и ускорения автомобиля от времени имеют вид:

$$v = S\omega \cos \omega t \quad (8)$$

$$a = -S\omega^2 \sin \omega t$$

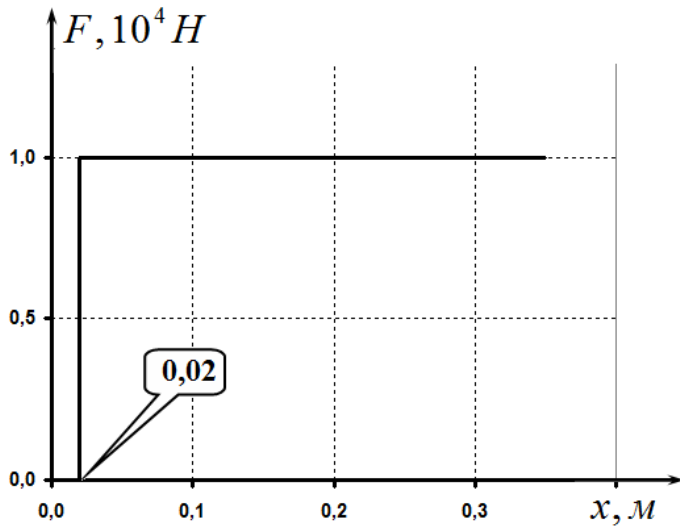
Максимальное ускорение автомобиль испытывает в последний момент торможения, оно равно

$$a_{\max} = S\omega^2 = 450 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (9)$$

Следовательно, максимальная перегрузка автомобиля равна

$$n = \frac{a_{\max}}{g} = 45. \quad (10)$$

**Часть 2. Манекен пристегнут к сидению ремнем безопасности.**



Сразу после столкновения манекен продолжает двигаться свободно, перемещаясь на расстояние  $l = 2,0$  см относительно автомобиля. Для определения момента времени, когда сработает ремень безопасности можно найти из уравнения

$$v_0 t - S \sin \omega t = l \quad (11)$$

Это уравнение не может быть решено аналитически, поэтому следует воспользоваться приближенными методами. Предположим, что  $\omega t < 1$ . В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой

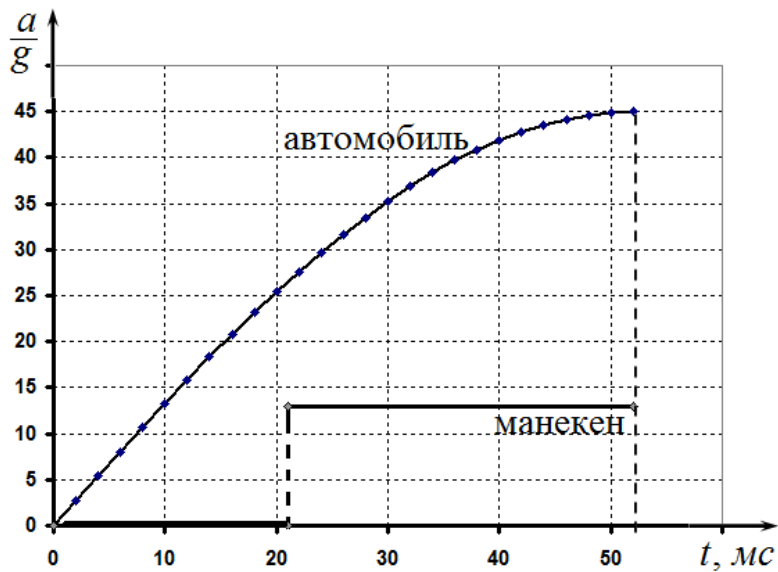
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (12)$$

В этом случае решение уравнения принимает значение

$$v_0 t - S \omega t + S \frac{(\omega t)^3}{6} = l \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\omega} \sqrt[3]{\frac{6l}{S}} \approx 0,021 \text{ с} = 21 \text{ мс} \quad (13)$$

Здесь учтено, что  $v_0 = S\omega$ . При этом  $\omega t \approx 0,62$ . Так, что предположение о малости этой величины оправдано.

*Примечание. Расчет по формуле (13) дает значение 0,0207. Решение методом Ньютона дает значение 0,2085, что подтверждает правомерность использованного приближенного метода.*

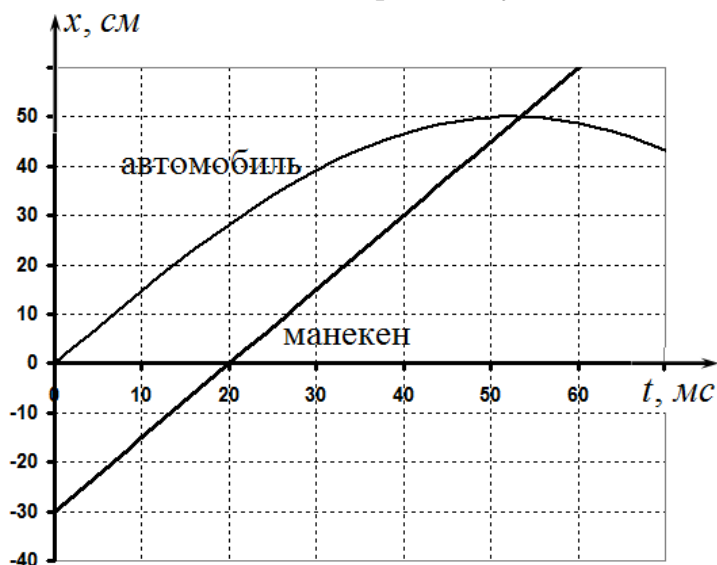


После того, как ремень натянулся, на манекен действует постоянная сила  $F$ . В этот промежуток времени перегрузка манекена равна

$$n = \frac{F}{mg} = \frac{1,0 \cdot 10^4}{75} \approx 13 \quad (14)$$

Зависимости перегрузок автомобиля и манекена от времени показаны на рисунке.

### Часть 3. Манекен не пристегнут.



Чтобы определить время, когда манекен ударится о рулевую колонку, необходимо решить уравнение, аналогичное уравнению (11)

$$v_0 t - S \sin \omega t = L \quad (15)$$

В данном случае, величину  $\omega t$  нельзя считать малой. Можно провести графический анализ этого уравнения (см. рис.), но поступим проще: Предположим, что столкновение произошло после остановки автомобиля. В этом случае координата автомобиля оказывается равной  $S$ . Следовательно, время движения в этом случае равно

$$t_1 = \frac{S + L}{v_0} = 0,053 \text{ с} = 53 \text{ мс}, \quad (16)$$

Что больше, чем время столкновения. Значит, действительно, удар о рулевую колонку произойдет после остановки автомобиля. Далее манекен ударяется о рулевую колонку. Рассчитаем скорость манекена после того, как рулевая колонка разрушится. Для этого запишем выражение для изменения кинетической энергии манекена, которое равно работе силы сопротивления со стороны рулевой колонки<sup>1</sup>:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd. \quad (17)$$

Из этого уравнения находим

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}} = \sqrt{15^2 - \frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^4 \cdot 0,2}{75}} = 13 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (18)$$

Это столкновение будет продолжаться в течении промежутка времени

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{F} m = \frac{15 - 13}{1,0 \cdot 10^4} \cdot 75 = 0,015 \text{ с} = 15 \text{ мс}. \quad (19)$$

То есть, это столкновение закончится в момент времени

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 68 \text{ мс}. \quad (20)$$

Перегрузка манекена в этом промежутке времени равна

$$n_2 = \frac{F}{mg} = 13,3. \quad (21)$$

Далее до столкновения со стеклом манекен будет двигаться свободно со скоростью  $v_1$ , пройдя расстояние  $d$ . Столкновение со стеклом произойдет в момент времени

$$t_3 = t_2 + \frac{d}{v_1} = 68 + \frac{0,2}{13} \cdot 10^3 = 83 \text{ мс}. \quad (22)$$

Если бы не рулевая колонка, удар манекена о лобовое стекло произошел бы в момент времени

$$t'_3 = \frac{S + L + 2d}{v_0} = 80 \text{ мс}. \quad (23)$$

Наконец, осталось рассмотреть удар о стекло. Для оценок примем, что силы, действующая со стороны стекла примерно постоянна. Тогда ускорение, с которым движется манекен в этом приближении можно найти по формуле:

$$\Delta x = \frac{v_1^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2\Delta x} = 1690 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (24)$$

Следовательно, перегрузка во время этого удара равна

$$n_4 \approx 170. \quad (25)$$

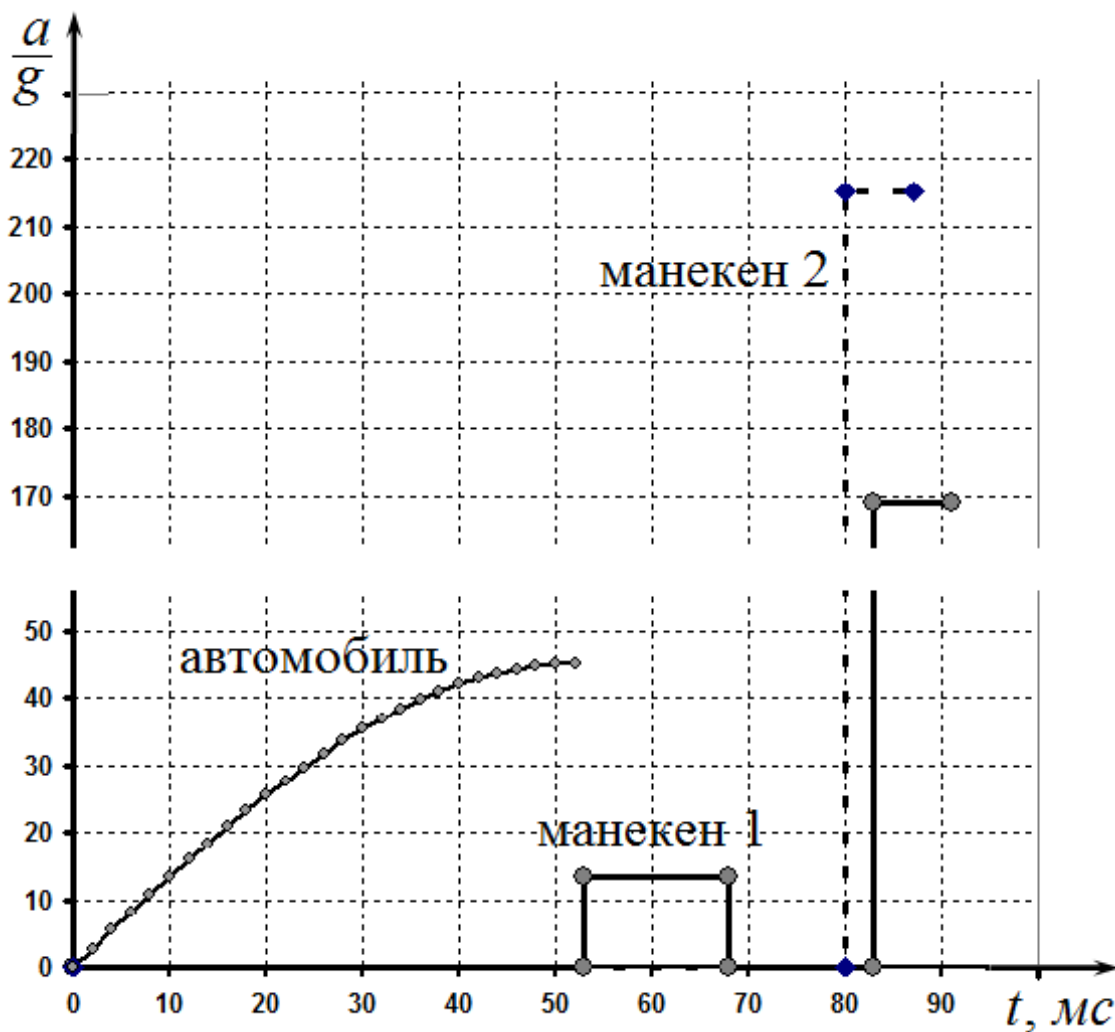
Время этого удара  $\Delta t_4 = \frac{2\Delta x}{v_1} \approx 8 \text{ мс}$ . Поэтому манекен остановится в момент времени  $t_4 = 91 \text{ мс}$ . Не пристегнутый манекен столкнется со стеклом в момент времени  $t'_3$ , со скоростью  $v_0$  его перегрузка в момент удара будет равна

$$n'_4 = \frac{v_0^2}{2g\Delta x} = 225. \quad (26)$$

<sup>1</sup> Либо равносильное кинематическое соотношение.

Удар будет продолжаться в течение промежутка

$$\Delta t'_4 = \frac{2\Delta x}{v_0} \approx 6,7 \text{ мс.} \quad (27)$$



Полученные данные позволяют построить графики зависимости перегрузки от времени в ходе столкновения.