

-2 Упругий маятник. Приборы и материалы

Условие

Задача 11-2 Упругий маятник.

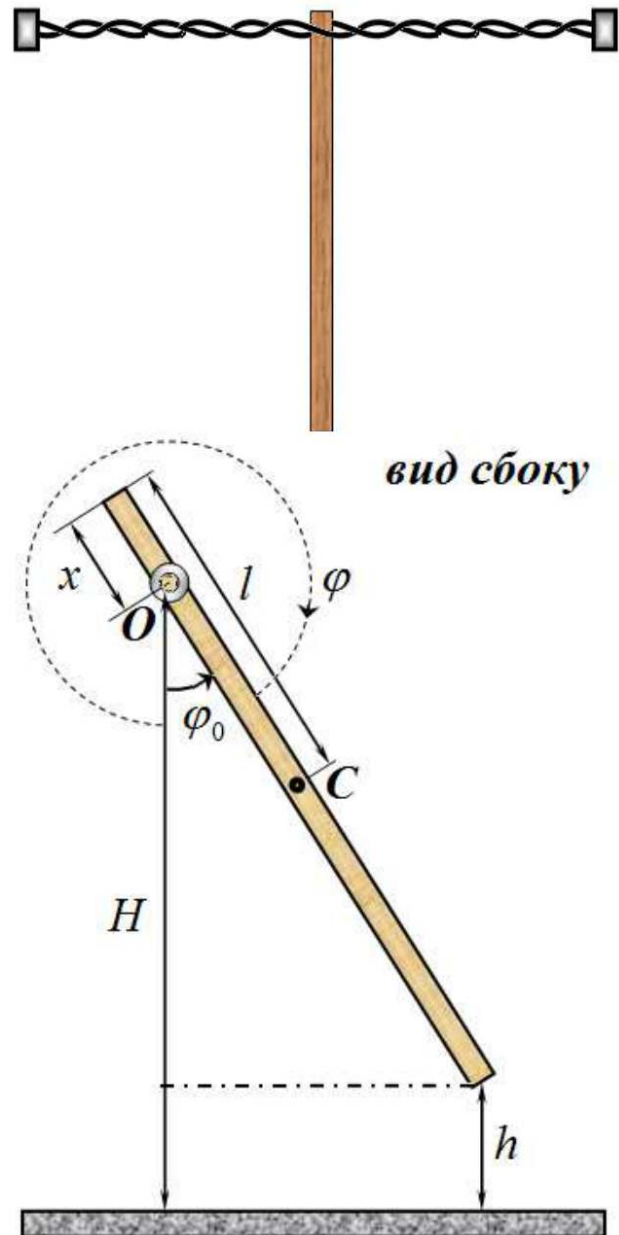
Приборы и материалы: двойной резиновый шнур, на подставке (в качестве которой используются ножки стула) линейка деревянная 40 см, линейка измерительная 40 см, секундомер.

Натяни двойной резиновый шнур между ногами перевернутого стула. Между шнурами ровно посередине помести деревянную линейку. Если закрутить шнур, вращая линейку, то силы трения смогут удерживать линейку в подвешенном состоянии, под некоторым углом к вертикали.

Для единообразия введём следующие обозначения: O - ось вращения линейки (совпадает с местом крепления между резиновыми шнурами); C - центр масс линейки; φ - угол закручивания резинового шнура (угол поворота линейки, для определенности всегда будем отсчитывать от вертикали по часовой стрелке), может составлять несколько оборотов (более 10); n - число полных оборотов закручивания шнура φ_0 - угол отклонения линейки от вертикали (меньше, чем $\frac{\pi}{2}$), отсчитывается против часовой стрелки; очевидно, что $\varphi = 2\pi n - \varphi_0$; l - расстояние от конца линейки до её центра масс (следовательно, длина линейки - $2l$); x - расстояние от конца линейки до оси вращения; H - высота оси вращения (резинового шнура) над поверхностью стола (или любого другого нулевого уровня); h - высота нижнего конца линейки над поверхностью стола. Условимся считать единицей измерения моментов сил величину $M_0 = mgl$. То есть все моменты сил (в системе СИ) следует делить на эту величину.

Часть 1. Положения равновесия.

1.1 Теоретический. Предположим, что момент сил упругости двойного резинового шнура M_1 пропорционален углу закручивания (закон



Гука)

$$M_1 = -k\varphi, \quad (1)$$

где k - коэффициент кручения. *Заметим, что углы измеряются в радианах (то есть, безразмерны), если моменты сил измеряются в единицах M_0 , то коэффициент k также является безразмерным.*

Запишите уравнение, позволяющее найти все возможные положения равновесия линейки (при произвольном числе оборотов закручивания n). Дайте графическую иллюстрацию возможных решений этого уравнения. Укажите, какие из этих значений могут быть реализованы в эксперименте. Оцените максимальное число возможных положений равновесия (при известных параметрах l, x, k).

1.2 Измерительный.

Измерьте все значения углов $\bar{\varphi}_{0n}$, при которых линейка находится в положении равновесия. Измерения проведите для $x \approx 100$ мм.

1.3 Расчетный.

1.3.1 Используя полученные экспериментальные данные, постройте графики зависимости момента сил упругости двойного шнура M_1 от угла закручивания φ для $x \approx 100$ мм. 1.3.2 Проверьте применимость закона Гука (1) для двойного резинового шнура. При необходимости измените приведенную формулу. Определите коэффициент кручения шнура k (не забудьте о погрешностях). **Не стремитесь точно описать полученную зависимость – выделите линейный участок и работайте с ним!** 1.3.3 Проверьте справедливость полученной вами оценки для числа возможных положений равновесия. Укажите причины возможных расхождений расчетного и измеренного числа возможных положений равновесия. Дайте улучшенную формулу этой оценки.

Часть 2. Колебания.

Если линейку вывести из положения равновесия, то она начнет колебаться. Сейчас вам необходимо исследовать эти колебания. Все измерения проводите при $x \approx 110$ мм и для $n > 5$. **В этой части рассчитывать погрешности не требуется!**

2.1 Теоретический. 2.1.1 Покажите⁸, что периоды колебаний возле разных положений равновесия $\bar{\varphi}_{0n}$ описываются формулой

$$T_n = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \bar{\varphi}_{0n} - \gamma}} \quad (2)$$

— ⁸ Не тратьте много времени на вывод этой формулы, если не получается быстро, то переходите к измерениям!

2.1.2 Укажите физический смысл параметра T_0 (получать явное выражение для него не нужно).

2.1.3 Получите аналитическое выражение для параметра γ .

2.2 Измерительный.

2.2.1 Проведите измерения периодов малых колебаний T_n при различных значениях числа оборотов закручивания шнура.

2.2.2 Постройте график полученной зависимости.

2.3 Расчетный.

2.3.1 Проанализируйте применимость формулы (2).

2.3.2 Определите значения параметров T_0 и γ в формуле (2).

Решение

Задача 11-2 Упругий маятник.

Часть 1. Положения равновесия.

1.1 В положении равновесия сумма моментов сил упругости и силы тяжести равна нулю, поэтому справедливо уравнение (в СИ)

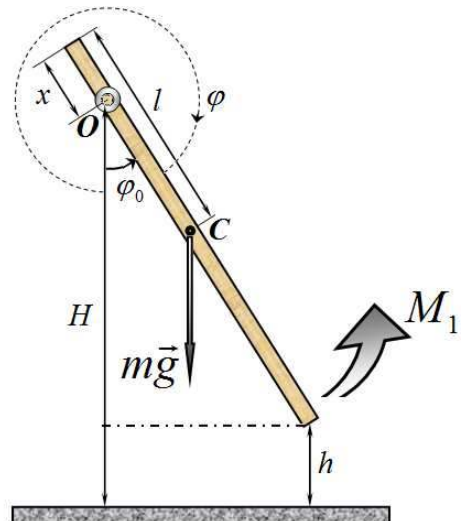
$$K\varphi = mg(l - x) \sin \varphi_0. \quad (1)$$

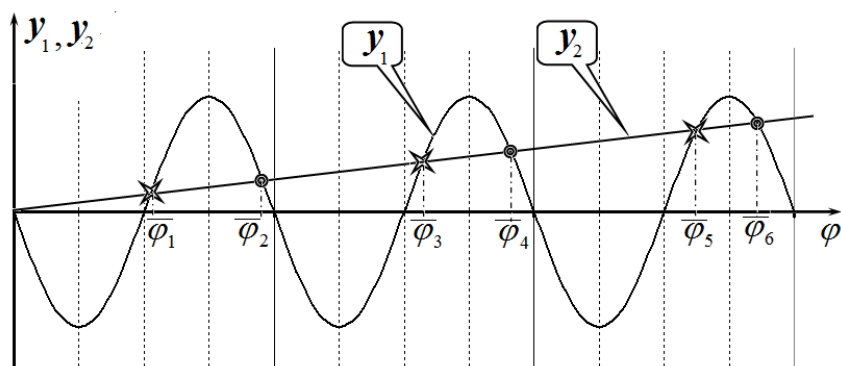
Если разделить это уравнение на введенную единицу момента силы $M_0 = mgl$, то получим

$$k\varphi = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \varphi_0 \quad (2)$$

В этом уравнении удобно перейти к углу закручивания, делая подстановку $\varphi_0 = 2\pi n - \varphi$. В результате получим

$$\frac{k}{1 - \frac{x}{l}} \varphi = -\sin \varphi \quad (3)$$





Это уравнение допускает простую графическую интерпретацию³. Построим схематически графики функций $y_1 = -\sin \varphi$ (перевернутая синусоида) и $y_2 = \frac{k}{1-\frac{x}{l}}\varphi$ (прямая), которые пропорциональны моментам сил тяжести и упругости. Абсциссы точек пересечения графиков этих функций являются корнями уравнения (3). Не сложно доказать, что, что все «нечетные» положения равновесия являются неустойчивыми (на рис. они отмечены звездочками), поэтому реализовываться могут только «четные» корни (отмеченные кружками). Чтобы оценить число возможных устойчивых положений равновесия, заметим, что при максимальном n , корень близок⁴ к $\bar{\varphi}_n \approx 2\pi n - \frac{\pi}{2}$, поэтому должно выполняться условие

$$\frac{k}{1-\frac{x}{l}} \left(2\pi n - \frac{\pi}{2} \right) < 1,$$

из которого следует оценка

$$n_{\max} < \frac{1-\frac{x}{l}}{2\pi k}. \quad (4)$$

— ³ Очевидно, что каждому положительному корню этого уравнения соответствует равный ему по модулю отрицательный корень. Физический смысл этого – можно закручивать в обе стороны, от этого ничего не изменяется! ⁴ А положение линейки близко к горизонтальному!

1.2 – 1.3 Для определения коэффициента кручения можно воспользоваться уравнением (2). Угол положения равновесия $\bar{\varphi}_{0n}$ можно рассчитать следующим образом. Из рисунка следует, что

$$\cos \bar{\varphi}_{0n} = \frac{H-h}{l-x}. \quad (5)$$

Здесь все величины легко измеряемы. Так как все углы равновесия меньше прямого, то

$$\bar{\varphi}_{0n} = \arccos \frac{H-h}{l-x}. \quad (6)$$

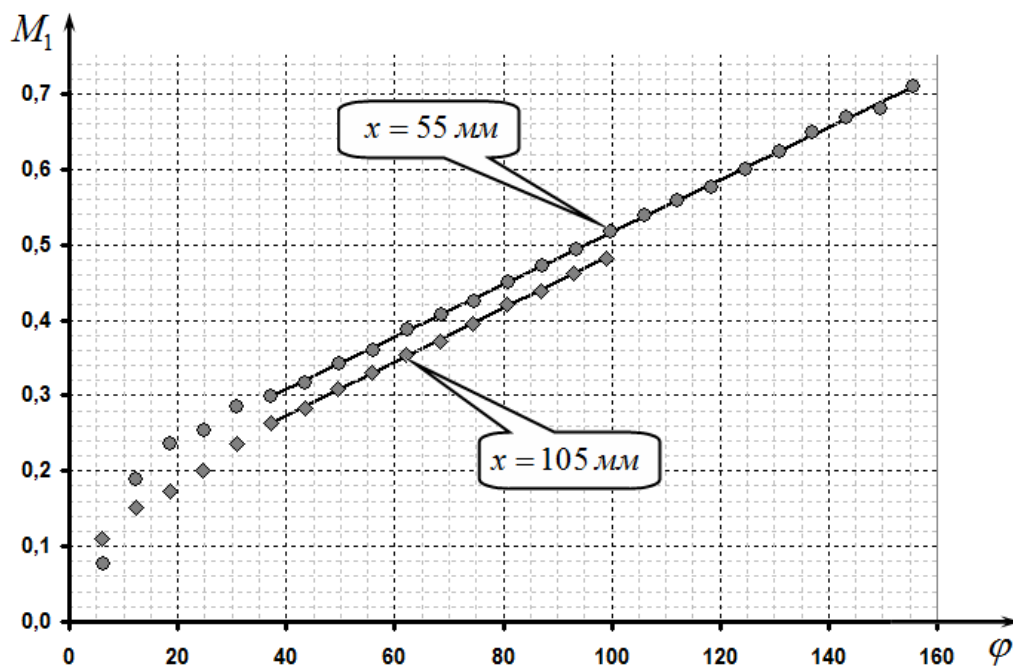
Соответствующий угол закручивания рассчитывается по формуле

$$\bar{\varphi}_n = 2\pi n - \bar{\varphi}_{0n}. \quad (7)$$

Проведя расчеты по этим формулам можно построить график зависимости момента силы тяжести (и равному ему моменту силы упругости) $M_1 = (1 - \frac{x}{l}) \sin \varphi_0$ от угла закручивания φ . В соответствии с уравнением (2) эта зависимость имеет вид $M_1 = k\varphi$, поэтому коэффициент наклона графика этой зависимости равен искомому коэффициенту кручения. Результаты измерений и необходимых расчетов приведены в таблице 1. Для обоснования достоверности проведенного анализа дополнительно проведены измерения и при $x = 55$ мм.

Таблица 1.

n	h , мм	$\cos \varphi_0$	φ_0	φ	M	h , мм	$\cos \varphi_0$	φ_0	φ	M
1	67	0,994	0,106	6,18	0,078	123	0,974	0,230	6,05	0,111
2	77	0,966	0,261	12,31	0,189	130	0,951	0,315	12,25	0,151
3	84	0,946	0,329	18,52	0,236	135	0,934	0,364	18,49	0,174
4	87	0,938	0,354	24,78	0,254	142	0,911	0,424	24,71	0,201
5	93	0,921	0,400	31,02	0,285	153	0,875	0,505	30,91	0,236
6	96	0,913	0,421	37,28	0,299	163	0,843	0,569	37,13	0,263
7	100	0,901	0,448	43,53	0,317	172	0,813	0,621	43,36	0,284
8	106	0,885	0,485	49,78	0,341	184	0,774	0,686	49,58	0,309
9	111	0,870	0,515	56,03	0,360	196	0,734	0,746	55,80	0,331
10	119	0,848	0,559	62,27	0,388	210	0,689	0,811	62,02	0,354
11	125	0,831	0,590	68,53	0,407	223	0,646	0,869	68,25	0,372
12	131	0,814	0,620	74,78	0,425	241	0,587	0,944	74,45	0,395
13	140	0,789	0,662	81,02	0,450	265	0,508	1,038	80,64	0,420
14	149	0,763	0,702	87,26	0,473	285	0,443	1,112	86,85	0,437
15	158	0,738	0,741	93,51	0,494	322	0,321	1,244	93,00	0,462
16	169	0,707	0,785	99,75	0,517	370	0,164	1,406	99,12	0,481
17	180	0,676	0,828	105,99	0,539					
18	190	0,648	0,866	112,23	0,557					
19	201	0,617	0,906	118,47	0,576					
20	216	0,575	0,959	124,71	0,599					
21	234	0,524	1,019	130,93	0,623					
22	255	0,465	1,087	137,14	0,648					
23	276	0,406	1,153	143,36	0,669					
24	290	0,366	1,196	149,60	0,681					
25	335	0,239	1,329	155,75	0,710					



На рисунке показаны графики полученных зависимостей. Видно, что малых углах закрутки зависимости не линейны. Однако уже при $n > 5$ экспериментальные точки практически точно ложатся на прямые линии. Это подтверждает применимость закона Гука с некоторой постоянной составляющей к моменту сил упругости. Коэффициенты наклона графиков (т.е. коэффициенты кручения), рассчитанные по МНК, оказались равными для $x = 55 \text{ мм}$:

$$k = (3,47 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$$

для $x = 105 \text{ мм}$:

$$k = (3,53 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, в пределах погрешностей полученные значения оказались равными.

Заметим, что оценки числа возможных положений равновесий оказываются завышенными. Однако, если уточнить постоянную составляющую в моменте силы, то оценка дает правильный значения числа возможных состояний.

Часть 2. Колебания.

2.1 Теоретический.

Запишем уравнение динамики для маятника (на основе уравнения (1)):

$$I\ddot{\varphi} = K\varphi - mg(l - x) \sin \varphi. \quad (5)$$

Здесь β - угловое ускорение, I - постоянный коэффициент (момент инерции). Так как колебания происходят вблизи положений равновесия, то можно представить

$$\varphi = \varphi_0 + \delta, \quad (6)$$

где φ_0 - угол отклонения в положении равновесия, $\delta(t)$ - малое отклонение от него. Тогда уравнение (5) преобразуется к виду (с учетом $\sin(\varphi_0 + \delta) \approx \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cdot \delta$):

$$\begin{aligned} I\beta &= K\varphi - mg(l-x)\sin \varphi = \\ &= (K\varphi_0 - mg(l-x)\sin \varphi_0) + K\delta - mg(l-x)\cos \varphi_0 \cdot \delta. \end{aligned} \quad (7)$$

Первая скобка в данном выражении обращается в нуль, так как определяет условие равновесия, поэтому дальнейшие преобразования очевидны:

$$\beta = -\frac{mg(l-x)}{I} \left(\cos \varphi_0 - \frac{K}{mgl \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \right) \delta. \quad (8)$$

Это есть уравнение гармонических колебаний, период которых

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{I}{mg(l-x)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0 - \frac{K}{mgl \left(1 - \frac{x}{l}\right)}}}{}} = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \frac{k}{1 - \frac{x}{l}}}}. \quad (9) \\ &\sqrt{\frac{\frac{I}{mg(l-x)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0 - \frac{K}{mgl \left(1 - \frac{x}{l}\right)}}}{}} \end{aligned}$$

Эта формула совпадает с формулой, приведенной в условии. Величина T_0 имеет смысл периода колебаний маятника без резинки, параметр $\gamma = \frac{k}{1 - \frac{x}{l}}$.

Полученное выражение допускает простую экспериментальную проверку.

2.2 Измерительный.

Результаты измерений периодов колебаний от числа оборотов закручивания резинки приведены в таблице 3 и на графике. Отметим, что проводить на этом графике сглаживающую кривую смысла нет, так как аргумент этой функции дискретный.

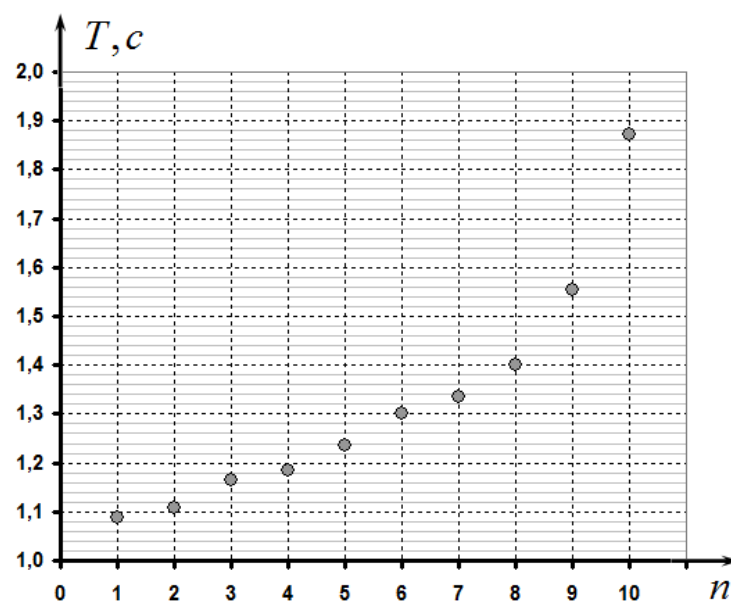
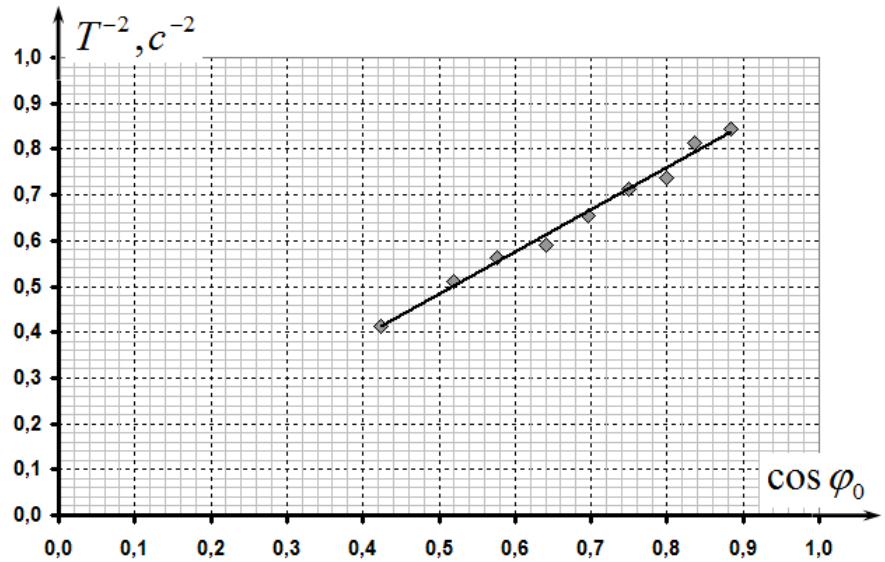


Таблица 3. Периоды колебаний.

n	h , мм	T , с	$\cos \varphi_0$	T^{-2} , с ⁻²
1	285	1,088	0,883	0,845
2	299	1,108	0,837	0,815
3	310	1,164	0,800	0,738
4	325	1,184	0,750	0,713
5	341	1,236	0,697	0,655
6	358	1,300	0,640	0,592
7	377	1,334	0,577	0,562
8	394	1,400	0,520	0,510
9	423	1,554	0,423	0,414
10	438	1,872	0,373	0,285

2.3 Расчетный.



Для проверки формулы (2) из условия задачи необходимо построить зависимость величины T^{-2} от $\cos \varphi_0$. Расчеты этих величин также приведены в Таблице 3. График полученной зависимости показан на рисунке.

Действительно, получилась линейная зависимость. Коэффициенты этой зависимости ($T^{-2} = a \cdot \cos \varphi_0 + b$), рассчитанные по МНК оказались равными

$$a = (0,92 \pm 0,07)c^{-2}$$

$$b = (0,02 \pm 0,05)c^{-2}$$

Сравнивая с исходной (не линеаризованной) формой уравнения определим искомые параметры

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} = 1,04c, \quad \gamma = \frac{b}{a} = 0,022. \quad (10)$$

Отметим, что провести сравнение с теоретическим значением параметра γ не представляется возможным, из-за большой погрешности его экспериментального значения.

³, Очевидно что каждому положительному корню этого уравнения соответствует равный ему по модулю отрицательный корень. Физический смысл этого – можно закручивать в обе стороны, от этого ничего не изменяется! ⁴ ! А положение линейки близко к горизонтальному