

Условие

Задача 11-2

В данной задаче рассмотрим известное явление фотоэффекта немного глубже, чем в обычном школьном курсе физики.

Важной характеристикой фотоэффекта, которая пригодится нам в задаче, является его квантовый выход Y , представляющий собой отношение числа вылетающих с поверхности электронов к числу падающих фотонов. Квантовый выход, вообще говоря, зависит от многих параметров: материала поверхности, угла падения излучения, частоты падающего излучения и прочих. В данной задаче можете считать квантовый выход постоянной величиной во всех пунктах, за исключением последнего вопроса. Также отметим, что будем рассматривать только однофотонный и одноэлектронный фотоэффект.

Напомним, одним из простых примеров конфигурации электромагнитного поля является плоская волна. Для плоской волны плотность энергии электромагнитного поля, то есть энергию в единице объема, можно рассчитать по формуле $w = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$, где E_0 – амплитуда напряженности электрического поля, изменяющейся со временем по гармоническому закону, ε_0 – электрическая постоянная.

Некоторые физические постоянные: скорость света $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Рассмотрим следующий классический эксперимент по регистрации фотоэффекта. На металлическую пластину падает плоская электромагнитная волна, модуль вектора напряженности которой в каждой точке меняется со временем по закону: $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где амплитуда $E_0 = 15$ В/м, угловая частота $\omega = 9,5 \cdot 10^{15}$ рад/с, φ_0 – некоторая начальная фаза (назовем данную волну пробной). Полученная в этом случае зависимость силы тока в цепи от напряжения представлена на рисунке 2. Основные характеристики, используемые для описания вольт-амперной характеристики фотоэлемента, это задерживающее напряжение U_z (обратное напряжение, при котором ток в цепи прекращается) и ток насыщения $I_{\max}$ (максимальный ток при данном освещении пластины).

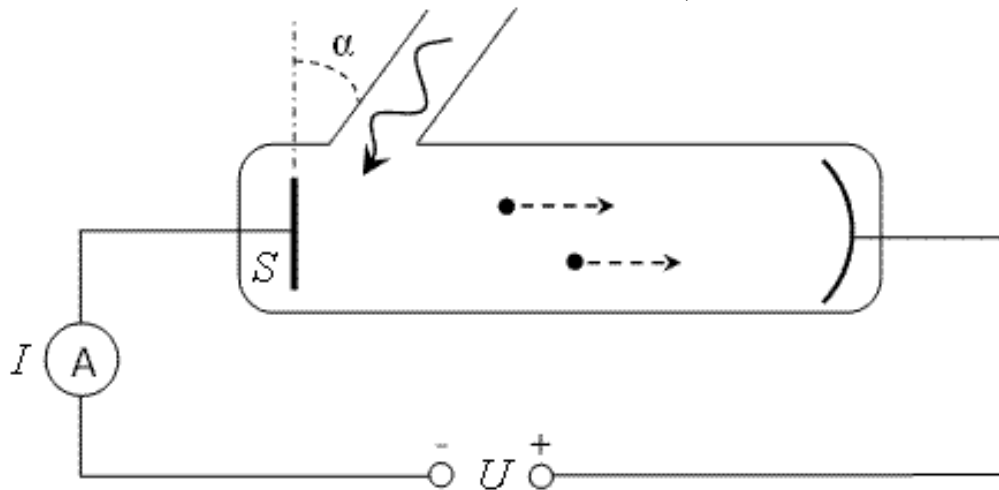


Рисунок 3 - Схема эксперимента

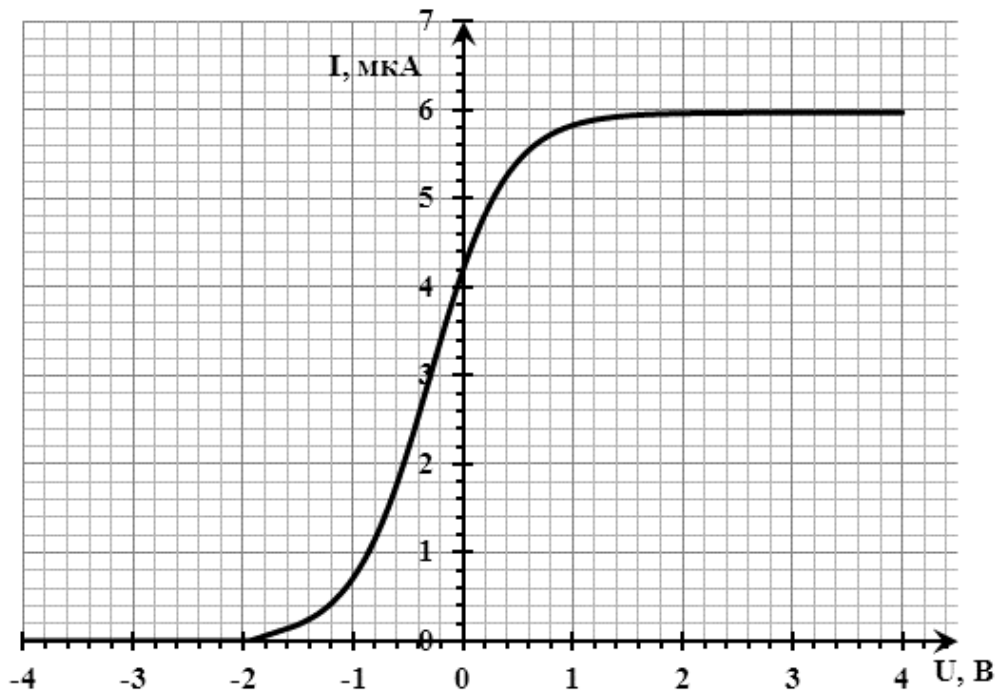


Рисунок 4 - Зависимость силы тока в цепи от напряжения при освещении пластины пробной волной

1. Меняем волну 1.1. Пусть теперь на пластину падает плоская волна, модуль вектора напряженности которой со временем меняется по закону $E(t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где новая амплитуда равна $E_1 = 25$ В/м, ω – как у пробной волны. Определите задерживающее напряжение и ток насыщения. 1.2. Пусть теперь на пластину падает плоская волна, модуль вектора напряженности которой со временем меняется по закону $E(t) = E_0 \cos(\omega' t + \varphi_0)$, где новая угловая частота равна $\omega' = 8,0 \cdot 10^{15}$ рад/с, E_0 – как у пробной волны. Определите задерживающее напряжение и ток насыщения.

2. Сложные волны 2.1. Определите задерживающее напряжение и ток насыщения, если на пластину падает волна, модуль вектора напряженности которой изменяется со временем следующим образом: 2.1.a) $E(t) = E_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, где угловые частоты: $\omega_1 = 9,50 \cdot 10^{15}$ рад/с, $\omega_2 = 1,5 \cdot 10^{14}$ рад/с.

2.1.b) $E(t) = E_0(1 + \cos \omega t) \cos(\omega t + \varphi_0)$, E_0, ω – как у пробной волны. 2.2. Примерно изобразите на графиках зависимости тока в цепи от приложенного напряжения для случаев 2.1.a и 2.1.b. Отметьте на них ключевые значения соответствующих величин.

3. Квантовый выход 3.1. Площадь пластины, на которую падает пробная волна, $S = 0,05$ м², при этом освещение падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности (см. рис. 1). Используя имеющиеся данные, определите квантовый выход Y фотоэффекта. 3.2. Вообще говоря, зависимость квантового выхода от частоты излучения весьма существенна, и пренебрегать ей можно, разве что, в модельных задачах. Для измерения данной зависимости пластину, описанную в пункте 3.1, освещали электромагнитными волнами различной частоты и постоянной амплитуды: $E_i(t) = E_0 \cos(\omega_i t + \varphi_0)$, где E_0 по-прежнему равно 15 В/м. Полученные значения задерживающего напряжения и тока насыщения представлены в таблице 1.

Используя имеющиеся данные, постройте приближенный график зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты падающего излучения в максимально возможном диапазоне частот.

№ опыта	** U_z , В**	** $I_{\max}$, мкА**
1	0,7	1,5
2	1,3	4,5
3	1,7	5,5
4	2,0	6,0
5	2,4	6,5
6	2,8	6,6
7	3,1	6,5
8	3,8	6,3

Таблица 1 – Результаты измерений задерживающего напряжения и тока насыщения

Решение

Задача 11-2

1. Меняем волну

1.1 Из графика для пробной волны находим: $U_{z \text{ проб}} = 2,0 \text{ В}$, $I_{\max \text{ проб}} = 6,0 \text{ мкА}$. Из уравнения фотоэффекта:

$$eU_{z \text{ проб}} = E_{\text{кин max}} = h\nu_{\text{проб}} - A_{\text{вых}} = h \frac{\omega_{\text{проб}}}{2\pi} - A_{\text{вых}}$$

$$eU_{z \text{ проб}} = E_{\text{кин max}} = h\nu_{\text{проб}} - A_{\text{вых}} = h \frac{\omega_{\text{проб}}}{2\pi} - A_{\text{вых}} \quad (1)$$

Отсюда можно заметить, что задерживающее напряжение для одной и той же пластины зависит только от частоты падающего излучения, потому в данном пункте задерживающее напряжение останется таким же:

$$U_{z \text{ 1.1}} = U_{z \text{ проб}} = 2,0 \text{ В}$$

Ток насыщения пропорционален количеству вылетевших электронов, которое пропорционально количеству падающих фотонов. Количество фотонов, падающих на пластину, можно определить, разделив энергию падающего поля на энергию одного фотона. Энергия же падающего поля, как сказано в условии, пропорциональна квадрату напряженности поля. Данную связь можно записать следующим образом (знак $\propto$ означает прямую пропорциональность):

$$I_{\max} \propto N_e \propto N_{\phi} \propto \frac{W}{h\nu} \propto \frac{E_0^2}{\omega} \quad (2)$$

Зная ток насыщения и характеристики поля пробной волны, можем записать пропорцию:

$$\frac{I_{\max \text{ проб}}}{I_{\max \text{ 1.1}}} = \frac{E_0^2 / \omega}{E_1^2 / \omega} = \frac{E_0^2}{E_1^2}$$

$$\frac{I_{\max \text{ проб}}}{I_{\max \text{ 1.1}}} = \frac{E_0^2 / \omega}{E_1^2 / \omega} = \frac{E_0^2}{E_1^2}$$

Отсюда находим ток насыщения:

$$I_{\max \text{ 1.1}} = I_{\max \text{ проб}} \frac{E_1^2}{E_0^2} = 1$$

$$I_{\max \text{ 1.1}} = I_{\max \text{ проб}} \frac{E_1^2}{E_0^2} = 16,7 \text{ мкА}$$

Заметим, что начальная фаза φ_0 никакого влияния на ток насыщения или задерживающее напряжение не оказывает.

1.2 Из уравнения (1) можно найти работу выхода пластины, используя характеристики пробной волны:

$$A_{\text{вых}} = h \frac{\omega_{\text{проб}}}{2\pi} - eU_{\text{з проб}} = 6,82 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,26 \text{ эВ}$$

Тогда, аналогично, задерживающее напряжение можно рассчитать следующим образом:

$$\frac{\omega}{2\pi} - A_{\text{вых}}$$

$$U_{\text{з 1.2}} = \frac{1}{e} \left(h \frac{\omega'}{2\pi} - A_{\text{вых}} \right) = 1,01 \text{ В}$$

Используя отношения (2) составим пропорцию для нахождения тока насыщения:

$$\frac{I_{\text{макспроб}}}{I_{\text{макс1.2}}} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$\frac{I_{\text{макс проб}}}{I_{\text{макс 1.2}}} = \frac{E_0^2/\omega}{E_0^2/\omega'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

Откуда находим ток насыщения:

$$I_{\text{макс 1.2}} = I_{\text{макс проб}} \frac{\omega}{\omega'} = 7,13 \text{ МКА}$$

$$I_{\text{макс1.2}} = I_{\text{макспроб}} \frac{\omega}{\omega'} = 7,1$$

2. Сложные волны 2.1. Задерживающее напряжение и ток насыщения. 2.1.а) Используя формулу приведения: $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$, получаем, что падающее поле можно представить в виде суммы двух плоских волн с амплитудой $E_0/2$:

$$E(t) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{E_0}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$E(t) = \frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

Задерживающее напряжение определяется максимальной кинетической энергией вылетающих электронов, которые будут обусловлены волной с максимальной частотой. Из уравнения фотоэффекта получим:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi} - A_{\text{вых}}$$

$$U_{\text{з 2.1}} = \frac{1}{e} \left(h \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi} - A_{\text{вых}} \right) = 2,10 \text{ В}$$

Аналогично соотношению (2) получаем пропорциональность (здесь важно помнить, что квантовый выход считаем не зависящим от частоты):

$$\frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 - \omega_2}$$

$$\frac{1}{h(\nu_1 + \nu_2)} + \frac{1}{h(\nu_1 - \nu_2)}$$

$$I_{\max 2.1} \propto N_e \propto N_{\Phi} \propto \frac{w_1}{h(\nu_1 + \nu_2)} + \frac{w_2}{h(\nu_1 - \nu_2)} \propto \frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 - \omega_2}$$

Приводя выражение к общему знаменателю и составляя пропорцию:

$$\frac{I_{\max 2.1}}{I_{\max \text{проб}}} = \frac{\frac{E_0^2 \omega_1}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}}{E_0^2 / \omega} = \frac{\omega_1 \omega}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

$$\frac{I_{\max 2.1}}{I_{\max \text{проб}}} = \frac{\frac{E_0^2 \omega_1}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}}{E_0^2 / \omega} = \frac{\omega_1 \omega}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

Отсюда находим ток насыщения:

$$I_{\max 2.1} = \frac{I_{\max \text{проб}}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} =$$

$$I_{\max 2.1} = \frac{\omega_1 \omega I_{\max \text{проб}}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = 3,00 \text{ мКА}$$

2.1.b) Снова используя формулу для произведения косинусов, как в пункте 2.1, получим:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{E_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_0) + \frac{E_0}{2} \cos(\varphi_0)$$

Не учитывая последнюю постоянную «фоновую» составляющую, получаем, как и в пункте 2.1 суперпозицию двух плоских волн с частотами ω и 2ω , амплитудами E_0 и $E_0/2$ соответственно. Аналогично пункту 2.1 задерживающее напряжение определяется максимальной частотой:

$$\frac{1}{2\pi} - A_{\text{вык}}$$

$$U_{3.2.2} = \frac{1}{e} \left(h \frac{2\omega}{2\pi} - A_{\text{вык}} \right) = 8,25 \text{ В}$$

Так же аналогичную пропорцию получаем и для тока насыщения:

$$\frac{\frac{E_0^2}{\omega} + \frac{(E_0/2)^2}{2\omega}}{I_{\max 2.2}} = \frac{\omega + \frac{2\omega}{2}}{E_0^2 / \omega} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{I_{\max 2.2}}{I_{\max \text{проб}}} = \frac{\frac{E_0^2}{\omega} + \frac{(E_0/2)^2}{2\omega}}{E_0^2 / \omega} = \frac{9}{8}$$

Отсюда ток насыщения равен:

$$I_{\max 2.2} = \frac{9}{8} I_{\max \text{проб}} =$$

$$I_{\max 2.2} = \frac{9}{8} I_{\max \text{проб}} = 6,75 \text{ мКА}$$

2.2. Для каждой отдельной плоской волны зависимость тока в цепи от напряжения будет иметь вид, аналогичный представленному в условии для пробной волны, но со своими значениями тока насыщения и задерживающего напряжения. График для суперпозиции волн можно получить, просуммировав значения графиков отдельных волн.

В пункте 2.1.а) способом, описанным в предыдущих пунктах, можно получить:

- Для составляющей $\frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2)$: Задерживающее напряжение $U_{з1} = 2,10$ В
Ток насыщения $I_{\max 1} = 1,48$ мкА

- Для составляющей $\frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)$: Задерживающее напряжение $U_{з2} = 1,90$ В
Ток насыщения $I_{\max 2} = 1,52$ мкА

На рисунке 1 пунктирными линиями изображены зависимости тока в цепи от приложенного напряжения для каждой из двух составляющих, сплошной линией — искомая «полная» зависимость.

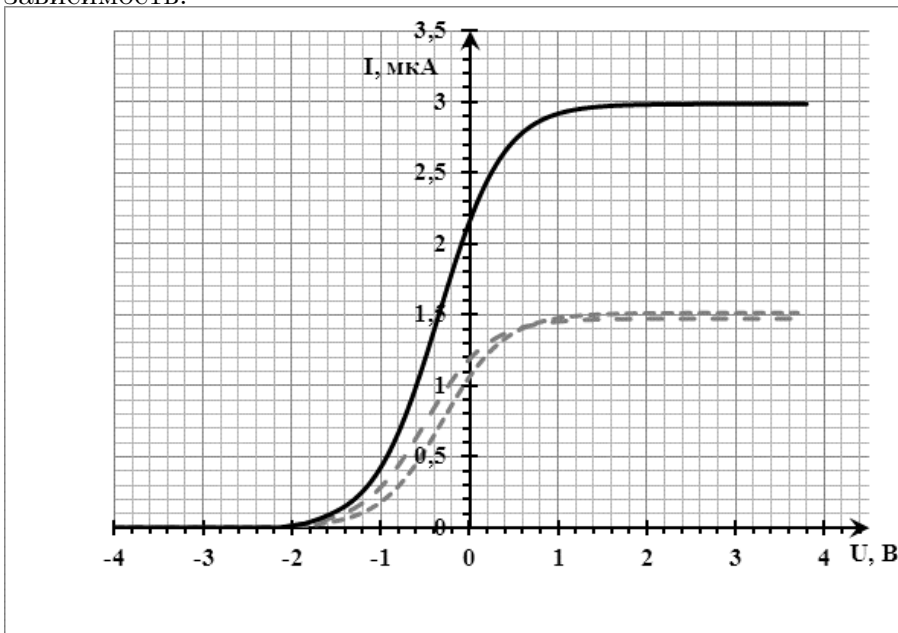


Рисунок 2 - Примерная зависимость силы тока в цепи от приложенного напряжения для случая 2.1.а

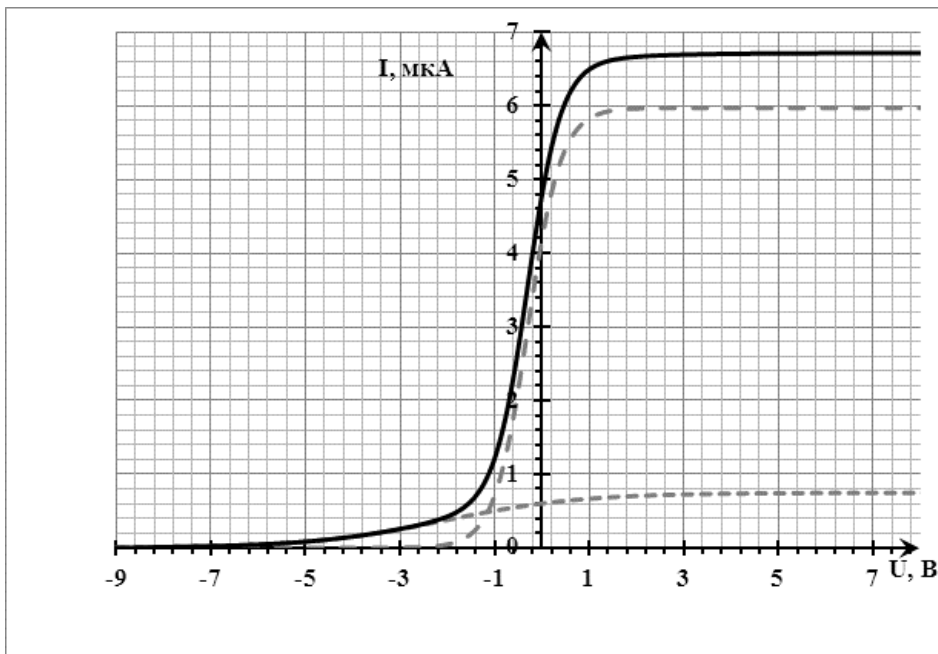
Все ключевые значения уже указаны и легко находятся на рисунке из указанного масштаба осей.

В пункте 2.1.б):

Для составляющей $E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, полностью совпадающей с пробной волной: Задерживающее напряжение $U_{з1} = 2,0$ В Ток насыщения $I_{\max 1} = 6,0$ мкА

Для составляющей $\frac{E_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_0)$: Задерживающее напряжение $U_{з1} = 8,25$ В Ток насыщения $I_{\max 1} = 0,75$ мкА

Примерный вид зависимости для пункта 2.1.б приведен на рисунке 2.



3. Квантовый выход 3.1. По определению, квантовый выход – отношение количества вылетевших электронов к количеству падающих фотонов. Количество вылетевших электронов за некоторое время t можно найти, используя значение тока насыщения:

$$N_{\text{эл}} = \frac{Q}{e} = \frac{I_{\text{max}} t}{e}$$

Где Q – заряд, прошедший по цепи за время t в режиме насыщения, e – заряд электрона.

$$n_{\phi} = \frac{W}{h\nu} = \frac{\pi \epsilon_0 E_0^2}{h\omega}$$

Найдем количество падающих за некоторое время t фотонов. Плотность энергии электромагнитного поля для пробной волны равна $W = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$, тогда в единице объема находится

$n_{\phi} = \frac{W}{h\nu} = \frac{\pi \epsilon_0 E_0^2}{h\omega}$ фотонов. Они падают на пластину площадью S со скоростью света c под углом α к пластине, тогда за время t количество попавших на пластину фотонов равно:

$$N_{\phi} = n_{\phi} \cdot ct \cdot S \sin \alpha = \frac{\pi \epsilon_0 E_0^2 ct S \sin \alpha}{h\omega}$$

Тогда квантовый выход можно рассчитать по формуле:

$$Y = \frac{N_{\text{эл}}}{N_{\phi}} = \frac{h\omega I_{\text{max}}}{e\pi \epsilon_0 E_0^2 c S \sin \alpha} \quad (3)$$

$$= \frac{N_{\text{эл}}}{N_{\phi}} = \frac{h\omega I_{\text{max}}}{e\pi \epsilon_0 E_0^2 c S \sin \alpha}$$

Подставляя характеристики пробной волны, получим: $Y = 0,00503$ 3.2. По данным измерения задерживающего напряжения можно получить частоты падающего излучения. Действительно, из уравнения (1):

Работа выхода определяется из характеристик пробной волны и уже была найдена в пункте 1.2. Найденные значения частоты для каждого измерения можно записать в таблицу. Далее, зная частоту излучения, его амплитуду (она по условию постоянна и равна 15 В/м) и частоту, а также ток насыщения, по формуле (3) можем рассчитать квантовый выход для каждой падающей волны. Данные вычислений занесем в таблицу: Таблица 1 - Результаты вычислений квантового выхода

№ опыта	** U_z , В**	** $I_{\max}$, мкА**	** $\omega \cdot 10^{15}$, рад/с**	** γ **
1	0,7	1,5	7,53	0,000996
2	1,3	4,5	8,44	0,00335
3	1,7	5,5	9,05	0,00439
4	2,0	6,0	9,50	0,00503
5	2,4	6,5	10,1	0,00579
6	2,8	6,6	10,7	0,00623
7	3,1	6,5	11,2	0,00642
8	3,8	6,3	12,2	0,00678

По имеющимся данным построим график зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты.

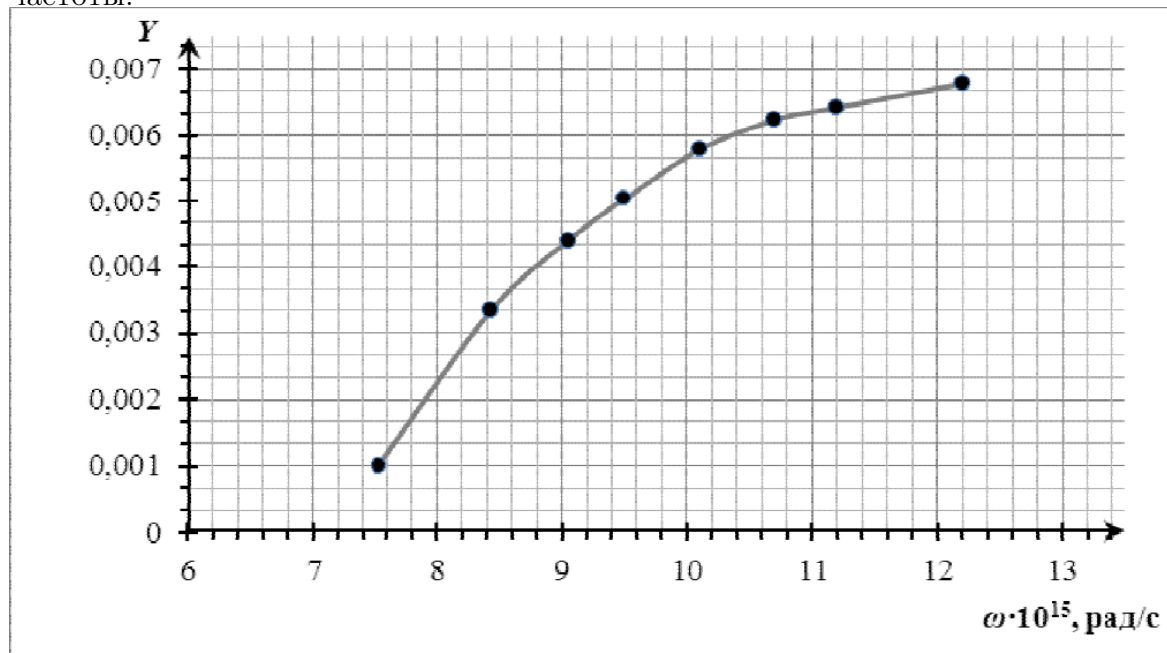


Рисунок 3 - График зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты

Видно, что квантовый выход увеличивается с увеличением частоты в заданном диапазоне, но темп этого роста уменьшается.