

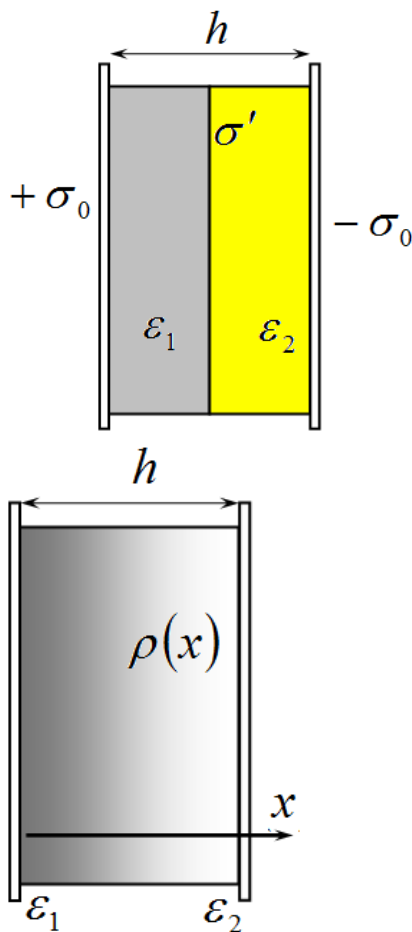
Условие

Задача 11-3

С развитием технологий появляются все новые материалы с удивительными свойствами. Два таких метаматериала рассматриваются в данной задаче.

Часть 1. Переменная диэлектрическая проницаемость.

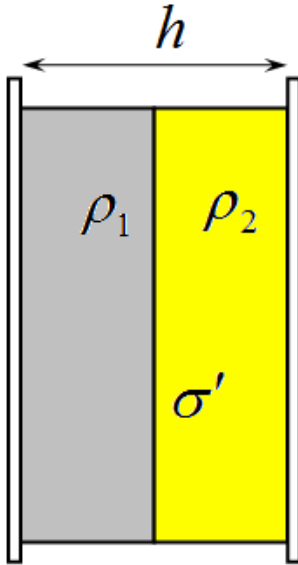
1.1.1 Плоский конденсатор состоит из двух металлических параллельных пластин площади S , находящихся на расстоянии h друг от друга. Пространство между пластинами заполнено двумя слоями диэлектрика (толщины этих слоев одинаковы) с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Найдите емкость такого конденсатора. 1.1.2 На внешние металлические пластины подают постоянное напряжение U_0 . Найдите поверхностные плотности зарядов на пластинах σ_0 и на границе раздела диэлектриков σ'



1.2 Плоский конденсатор состоит из двух металлических параллельных пластин площади S , находящихся на расстоянии h друг от друга. Пространство между пластинами заполнено диэлектриком, проницаемость которого плавно изменяется от ε_1 у левой пластины до ε_2 у правой. Закон изменения проницаемости от координаты x имеет вид $\varepsilon = (ax + b)^{-1}$. 1.2.1 Выразите параметры этой зависимости через значения ε_1 и ε_2 . 1.2.2 Найдите емкость этого конденсатора. 1.2.3 На внешние металлические пластины подают постоянное напряжение U_0 . При этом внутри диэлектрика возникают объемные поляризационные заряды. Найдите их объемную плотность как функцию координаты x $\rho(x)$

Часть 2. Переменная проводимость. 2.1.1 Плоский резистор состоит из двух металлических параллельных пластин площади S , находящихся на расстоянии h друг от друга. Пространство между пластинами заполнено двумя слоями слабо проводящих веществ (тол-

щины этих слоев одинаковы) с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 . Найдите сопротивление такого резистора. 2.1.2 На внешние металлические пластины подают постоянное напряжение U_0 . Найдите поверхностную плотность заряда σ' на границе раздела слоев. Поляризационными зарядами пренебречь.



2.2.1 Плоский резистор состоит из двух металлических параллельных пластин площади S , находящихся на расстоянии h друг от друга. Пространство между пластинами заполнено веществом, удельное сопротивление которого плавно изменяется от ρ_1 у левой пластины до ρ_2 у правой по линейному закону. 1.2.1 Запишите формулу, описывающую изменение удельного сопротивления вещества. 1.2.2 Найдите сопротивление этого резистора. 1.2.3 На внешние металлические пластины подают постоянное напряжение U_0 . При этом внутри вещества возникают объемные заряды. Найдите их объемную плотность как функцию координаты x .

Решение

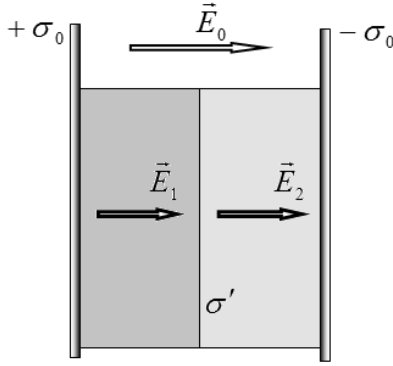
Задача 11-3

Часть 1. Переменная диэлектрическая проницаемость.

1.1.1 Описанную систему можно рассматривать как два конденсатора, соединенных последовательно. Используя формулу для емкости плоского конденсатора, запишем емкость составного конденсатора

$$\frac{1}{C} = \frac{h}{2\varepsilon_1\varepsilon_0S} + \frac{h}{2\varepsilon_2\varepsilon_0S} = \frac{h}{2\varepsilon_0S} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \Rightarrow C = \frac{2\varepsilon_0S}{h} \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (1)$$

1.1.2 При помещении диэлектрика во внешнее поле на нем возникают поляризационные заряды, которые изменяют поле внутри диэлектрика. Если силовые линии поля перпендикулярны границам диэлектрика, то напряженность поля внутри диэлектрика оказывается в ε раз меньше.



Обозначим напряженность поля, создаваемого только зарядами на пластинах $\vec{E}_0$, модуль которой связан с поверхностной плотностью зарядов на пластинах соотношением

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0. \quad (2)$$

Тогда напряженности полей внутри диэлектриков будут равны $\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}$, $\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_2}$. Разность потенциалов между пластинами (напряжение) может быть выражена через напряженности полей следующим образом

$$U_0 = E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \frac{h}{2} + \frac{E_0}{\varepsilon_2} \frac{h}{2} = E_0 \frac{h}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (3)$$

Откуда следует, что

$$E_0 = U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (4)$$

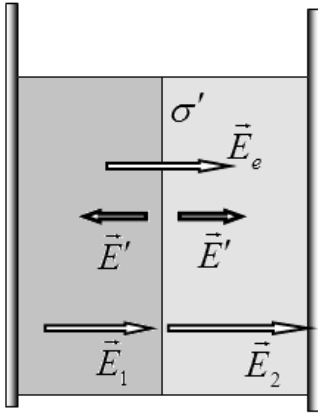
А поверхностная плотность зарядов на пластинах

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (5)$$

Впрочем, эта формула может быть получена непосредственно из формулы (1), как $q = CU_0$. Поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе диэлектриков σ' может быть найдена различными способами.

Способ 1. Представим поля внутри диэлектриков как суперпозицию поля $E' = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$, создаваемого зарядами σ' и поля $\vec{E}_e$, создаваемого всеми остальными зарядами (на пластинах и поляризационных зарядов на границах диэлектриков, примыкающих к пластинам). В этом случае напряженности полей внутри диэлектриков описываются формулами

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_e - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \\ E_2 &= \frac{E_0}{\varepsilon_2} = E_e + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (6)$$

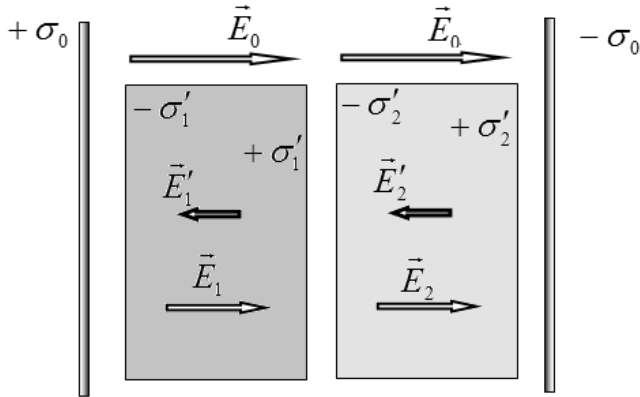


Из этих формул следует

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma' = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} E_0 \quad (7)$$

Подставляя выражение (4), окончательно получим

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_0}{h} U_0 \quad (8)$$



Способ 2. Поле внутри диэлектрика $\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}$ может быть представлено как сумма внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля $E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}$, создаваемого поляризационными зарядами:

$$\frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}. \quad (9)$$

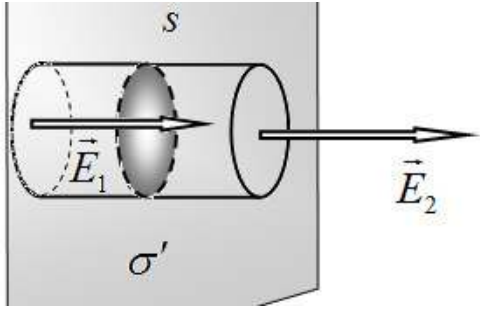
Откуда находим

$$\sigma'_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} E_0. \quad (10)$$

Поверхностная плотность зарядов на втором диэлектрике описывается аналогичной формулой. Суммарная плотность заряда на границе равна $\sigma' = \sigma'_1 - \sigma'_2 = \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, что совпадает с формулой (7).

Способ 3. Используем теорему Гаусса для поверхности изображенной на рисунке.

$$E_2 s - E_1 s = \frac{\sigma' s}{\varepsilon_0}.$$



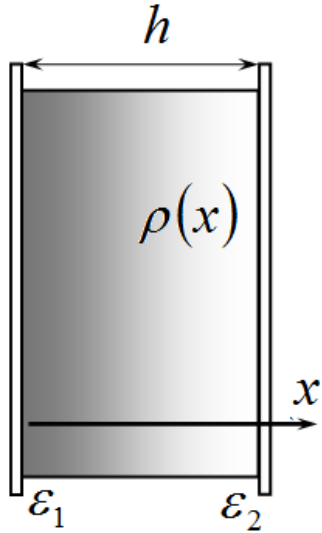
Из этой формулы следует $\sigma' = \varepsilon_0 \left(\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} \right)$, что приводит, как это не странно, к тому же результату (10).

1.2 Решение этой части задачи, в принципе, аналогично решению предыдущей части. 1.2.1 Сначала выразим параметры зависимости диэлектрической проницаемости от координаты

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{ax + b} \quad (11)$$

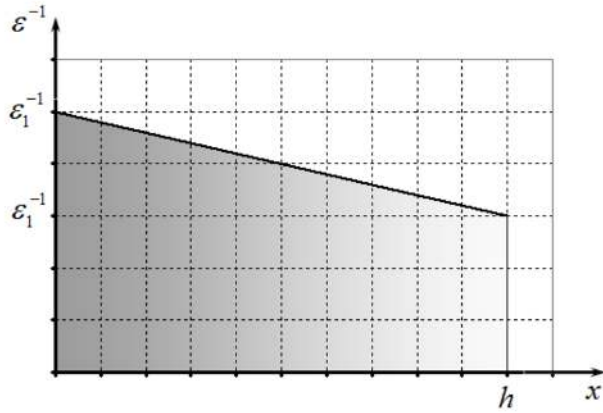
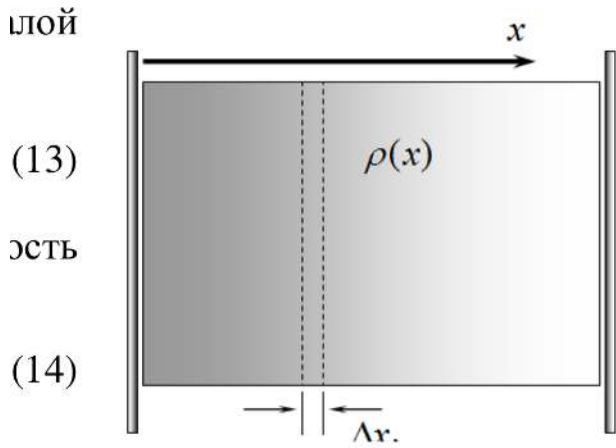
через граничные значения. Для этого запишем и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} = b \\ \frac{1}{\varepsilon_2} = ah + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\varepsilon_1} \\ a = \frac{1}{h} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \end{cases} \quad (12)$$



1.2.2 Для расчета емкости конденсатора представим его как совокупность последовательно соединенных конденсаторов малой толщины Δx_i , емкости которых равны

$$C_i = \frac{\varepsilon(x) \varepsilon_0 S}{\Delta x_i}. \quad (13)$$



При последовательном соединении суммарная емкость рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \sum_i \frac{1}{\varepsilon(x)\varepsilon_0 S} \Delta x_i = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \sum_i \frac{\Delta x_i}{\varepsilon(x)}. \quad (14)$$

При малых Δx_i сумма в выражении (14) равна площади под графиком зависимости $\varepsilon^{-1}(x)$. Так как эта зависимость линейна, то в результате суммирования получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{\varepsilon_0 S} \sum_i \frac{\Delta x_i}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{h}{2} (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{h}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \end{aligned}$$

Тогда емкость конденсатора оказывается равной

$$C = 2 \frac{\varepsilon_0 S}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (15)$$

Для расчета объемной плотности поляризации зарядов запишем выражение для напряженности электрического поля

$$E(x) = \varepsilon^{-1}(x) E_0, \quad (16)$$

где E_0 - как и ранее напряженность поля создаваемого только зарядами на пластинах. Разность потенциалов между пластинами в данном случае определяется формулой

$$U_0 = \sum_i E(x) \Delta x_i = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x) \Delta x_i. \quad (17)$$

Эту сумму мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем

$$U_0 = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x) \Delta x_i = E_0 \frac{h}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Rightarrow$$

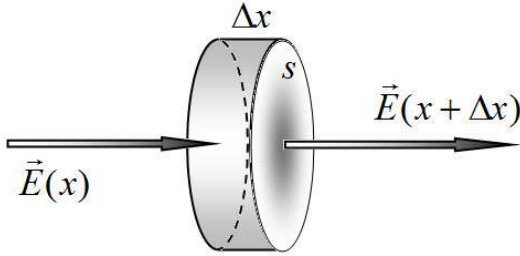
$$E_0 = 2 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (18)$$

Таким образом, зависимость напряженности от координаты имеет вид

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon(x)} = 2 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \varepsilon^{-1}(x). \quad (19)$$

Для расчета зависимости плотности заряда от координаты воспользуемся самым коротким способом, основанном на теореме Гаусса (хотя приемлем и любой из ранее рассмотренных). Так для тонкого цилиндра толщиной Δx , основания которого параллельны пластинам, имеем:

$$E(x + \Delta x)s - E(x)s = \frac{\rho(x)\Delta x}{\varepsilon_0}. \quad (20)$$



Из этой формулы следует, что

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\Delta \varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a$$

, где a - коэффициент, найденный ранее (формула (12)). С учетом этой формулы получим

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\Delta \varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (21)$$

Отметим, что объемная плотность поляризационных зарядов постоянна по объему диэлектрика.

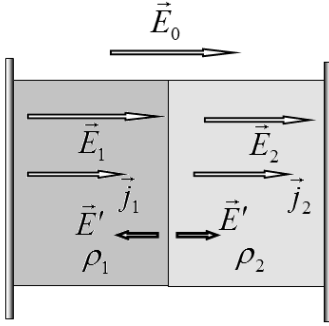
Часть 2. Переменная проводимость.

2.1.1 Сопротивление резистора найдем как сумму двух последовательно соединенных резисторов

$$R = \rho_1 \frac{h}{2S} + \rho_2 \frac{h}{2S} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{h}{S}. \quad (22)$$

2.1.2 Поясним причину возникновения заряда в этом случае. При включении внешнего поля плотности токов будут различным, что приведет к накоплению зарядов на границе раздела. Эти заряды будут изменять плотности токов в разных материалах до тех пор, пока плотности токов не сравняются. Итак, в установившемся режиме будет выполняться условие

$$j_1 = j_2 \Rightarrow \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} \quad (23)$$



Как уже было отмечено, различия в напряженностях полей обусловлены полем, создаваемым зарядами на границе, поэтому

$$E_1 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \quad E_2 = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь E_0 - напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, кроме зарядов на границе.

Из уравнений (23)-(24) найдем

$$\frac{1}{\rho_1} \left(E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho_2} \left(E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right) \Rightarrow \sigma' = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (24)$$

Из формул (24) и определения напряжения следует, что величина E_0 может быть легко найдена

$$U_0 = E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = E_0 h \Rightarrow E_0 = \frac{U_0}{h} \quad (25)$$

Поэтому поверхностная плотность зарядов на границе равна

$$\sigma' = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (26)$$

2.2 Основная идея решения этой части заключается в постоянстве плотности тока, т.е.

$$j = \frac{E}{\rho} = const. \quad (27)$$

Поэтому напряженность поля внутри проводника изменяется по закону

$$E(x) = j\rho(x) \quad (28)$$

Зависимость удельного сопротивления от координаты линейна, с учетом значений на границе эта зависимость имеет вид

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} x. \quad (29)$$

Для определения плотности тока запишем выражение для напряжения между пластинами резистора

$$U_0 = \sum_i E(x) \Delta x = \sum_i j \rho(x) \Delta x = j \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} h. \quad (30)$$

из которого выразим

$$j = \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (31)$$

Ранее было получено, что плотность² заряда определяется формулой $\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x}$. Используя эту формулу, а также выражения (28), (29), (31), найдем

$$\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = \varepsilon_0 j \frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \varepsilon_0 \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} = \frac{2\varepsilon_0 U_0}{h^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (32)$$

Как и в первой части, объемная плотность заряда оказалась постоянной.

Последнее замечание. Вторую часть задачи можно было и не решать!

В первой части расчет электрического поля сводился к решению системы уравнений

$$E(x) = \varepsilon^{-1}(x) E_0 = (ax + b) E_0, \quad \sum_i E(x) \Delta x = U_0,$$

А во второй

$$E(x) = \rho(x) j = (ax + b) j, \quad \sum_i E(x) \Delta x = U_0,$$

Эти систему уравнений полностью совпадают, если E_0 заменить на j , ε^{-1} заменить на ρ . Достаточно было просто переписать формулы с учетом этих замен!

² Чтобы не путать с удельным электрическим сопротивлением, обозначим плотность заряда γ .

² Чтобы не путать с удельным электрическим сопротивлением, обозначим плотность заряда γ .