

Условие

Задача 10-1. Вода из воздуха

В воздухе, окружающем нас, всегда содержится некоторое количество водяного пара. При некоторых условиях этот пар конденсируется, то есть превращается в воду. В природе такой эффект мы можем наблюдать в виде капель на листьях растений (росы) при том, что дождя перед этим не было. Отношение количества водяного пара в воздухе к предельному, когда он начнет конденсироваться, называют относительной влажностью воздуха, или просто влажностью (φ).

В данной задаче на примере работы юного экспериментатора Феди вам предлагается рассмотреть возможность получения некоторого количества воды из воздуха при помощи различных физических процессов. Водяной пар и воздух в решении можете считать идеальными газами. Наконец, напомним вам некоторые физические постоянные (никто не гарантирует, что все из них вам понадобятся):

Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$

Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Постоянная Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$

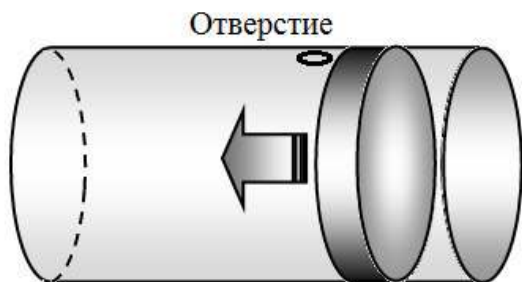
Молярная масса воды $M = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ кг}/\text{моль}$

Удельная теплоемкость воды $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$

Нормальное атмосферное давление $p_{\text{атм}} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$

Температура кипения воды (при $p_{\text{атм}}$) $T_{\text{кип}} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ К}$

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$



Молодой, но талантливый экспериментатор Федя, захотев получить воду прямо из воздуха, провел физический опыт. Федина установка представляет собой цилиндрический герметичный сосуд (рис. 1) с поршнем малой массы, способным двигаться практически без трения. Стенки сосуда и поршень хорошо проводят тепло. В начальном положении в сосуд через отверстие поступает воздух из комнаты. Температура воздуха в комнате $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, (давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно $p_{\text{нас}} = 2,35 \text{ кПа}$) его относительная влажность $\varphi = 77\%$. Начальный объем сосуда с поршнем $V_1 = 5,0 \text{ л}$.

Федя медленно уменьшает объем газа, оказывая давление на поршень. При этом успевает полностью проходить процесс теплообмена через стенки с окружающей средой. Максимальное избыточное давление, которое Федя может оказать на поршень при помощи своего оборудования, составляет $0,5p_{\text{атм}}$. Федя рассчитал, что в процессе сжатия после некоторого положения поршня на стенках сосуда и на поршне начнут появляться мелкие капли влаги.

1.1 Определите, при каком объеме воздуха водяной пар в сосуде начнет конденсироваться. Для получения максимально возможного количества воды Федя сжимал газ в сосуде до наименьшего объема, которого он мог достичь.

1.2 Определите, до какого минимального объема Федя может сжать воздух в сосуде.

В расчетах объем воды, образующейся в процессе конденсации, можете считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом сосуда.

А3. Рассчитайте массу воды, образовавшейся в результате такого сжатия.

Предположим, что Федя разработал некоторый механизм, позволяющий собирать влагу из сосуда, не открывая его и не влияя на давление, объем или температуру газов.

1.4 Определите, за сколько таких «сжатий» можно будет собрать один стакан воды ($m_c = 200$ г).

1.5 Оцените количество работы, которую совершил Федя при сжатии.

Для повторения всего процесса Федя организовал работу по следующему циклу. После описанного сжатия и сбора образовавшейся влаги Федя медленно увеличивает размер сосуда до первоначального объема. При достижении объема V_1 открывается отверстие для доступа воздуха, окружающего сосуд. Выждав достаточное время, Федя снова начинает сжатие.

1.6 Схематически (без точных числовых значений) изобразите p - V диаграмму для водяного пара в описанном циклическом процессе. Укажите направление процесса на диаграмме.

1.7 Оцените полное количество работы, совершаемое Федей за один цикл.

Для определения «трудоемкости» процесса получения воды из воздуха Федя придумал следующую характеристику – удельную работу конденсации (Θ), – равную работе, затраченной на образование 1 килограмма воды.

1.8 Оцените удельную работу конденсации для описанного цикла.

Решение

Задача 10-1. Вода из воздуха

1.1. Согласно определению относительной влажности начальное давление водяного пара в сосуде составляет $p_1 = \varphi p_{н1}$, где $p_{н1}$ — давление насыщенного водяного пара при комнатной температуре T_1 . Из графика на бланке можно определить: $p_{н1} \approx 2,35$ кПа. Стоит отметить, что парциальное давление водяного пара в полном давлении воздуха в сосуде составляет лишь тысячные части, а поскольку, согласно числовым данным задачи, требуемая точность решения составляет две значащие цифры, в дальнейшем влиянием водяного пара на полное давление воздуха можно будет пренебречь.

При изотермическом сжатии сосуда давление газов в нем, в том числе и водяного пара, будет увеличиваться. По достижению давления $p_{н1}$ последний начнет конденсироваться. Используя выражение для квазистационарного изотермического процесса с водяным паром, считая его идеальным газом, получим $\varphi p_{н1} V_1 = p_{н1} V_b$, где V_b — объем газов в сосуде, при котором начнет появляться влага. Отсюда:

$$V_b = \varphi V_1 = 0,77 \cdot 5,0 \text{ л} = 3,85 \text{ л}$$

Требуемая точность вычислений, согласно данным в условии задачи, — две значащие цифры. Однако мы будем приводить три из них для того, чтобы полученные величины можно было использовать в дальнейших вычислениях, не опасаясь за нарастание погрешности округления. Повторимся, окончательный ответ получается путем округления всех полученных в решении величин до двух значащих цифр.

1.2. Максимальное давление газов в сосуде, оказываемое как Федей, так и атмосферой, составляет $1,5 p_{\text{атм}}$. Пренебрегая парциальным давлением водяного пара и объемом образовавшейся жидкости, запишем уравнение для изотермического процесса с воздухом в сосуде: $p_{\text{атм}} V_1 = 1,5 p_{\text{атм}} V_2$, откуда:

$$V_2 = V_1 / 1,5 = 5,0 \text{ л} / 1,5 = 3,33 \text{ л}$$

Сравнивая результаты пунктов А1 и А2 видим, что Федея установка действительно позволяет конденсировать водяной пар.

1.3 Так как давление водяного пара не может быть больше насыщенного, при уменьшении объема после значения V_v оно будет оставаться постоянным за счет уменьшения химического количества водяного пара в сосуде. Уменьшение произойдет на количество, соответствующее количеству образовавшейся воды. Химическое количество водяного пара в начальном и конечном состоянии можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, а массу воды найдем, зная ее молярную массу:

$$= M \left(\frac{\varphi p_{\text{н1}} V_1}{RT_1} - \frac{p_{\text{н1}} V_2}{RT_1} \right) = \frac{Mp_{\text{н1}}}{RT_1} (\varphi V_1 - V_2)$$

$$m_A = M(\nu_1 - \nu_2) = M \left(\frac{\varphi p_{\text{н1}} V_1}{RT_1} - \frac{p_{\text{н1}} V_2}{RT_1} \right) = \frac{Mp_{\text{н1}}}{RT_1} (\varphi V_1 - V_2) = \frac{Mp_{\text{н1}}}{RT_1} (V_v - V_2)$$

$$m_A = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 2,35 \cdot 10^3 \text{ Па}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} (273 + 20) \text{ К}}$$

$$m_A = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 2,35 \cdot 10^3 \text{ Па}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} (273 + 20) \text{ К}} (3,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 - 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 9,03 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Таким образом, за одно сжатие Федея может получить всего 9,03 мг воды.

1.4. Стакан воды можно насобирать за $N_A = m_c / m_A = 22148$ сжатий.

1.5 Несмотря на особенности изменения давления водяного пара при сжатии содержимого сосуда, основное количество работы, совершаемое Федей, определяется давлением всего воздуха, так как последнее гораздо больше. Ввиду того, что давление газов в сосуде изменяется в ходе изотермического процесса, для грубой оценки совершенной работы будем использовать среднее арифметическое значение: $p_{\text{ср}} = (p_{\text{атм}} + 1,5p_{\text{атм}})/2 = 1,25p_{\text{атм}}$. Тогда работа, совершенная Федей, равна работе газа, взятой со знаком «минус», и определяется выражением:

$$A_{\text{сж}} = -p_{\text{ср}}(V_2 - V_1) = 211 \text{ кДж}$$

1.6 От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изотермическому процессу и представляет собой участок гиперболы. Далее процесс конденсации происходит при постоянном давлении (насыщенного пара). Обратное расширение после сбора влаги снова протекает изотермически по участку другой гиперболы из-за нового химического количества пара до первоначального объема. Далее при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке 1.

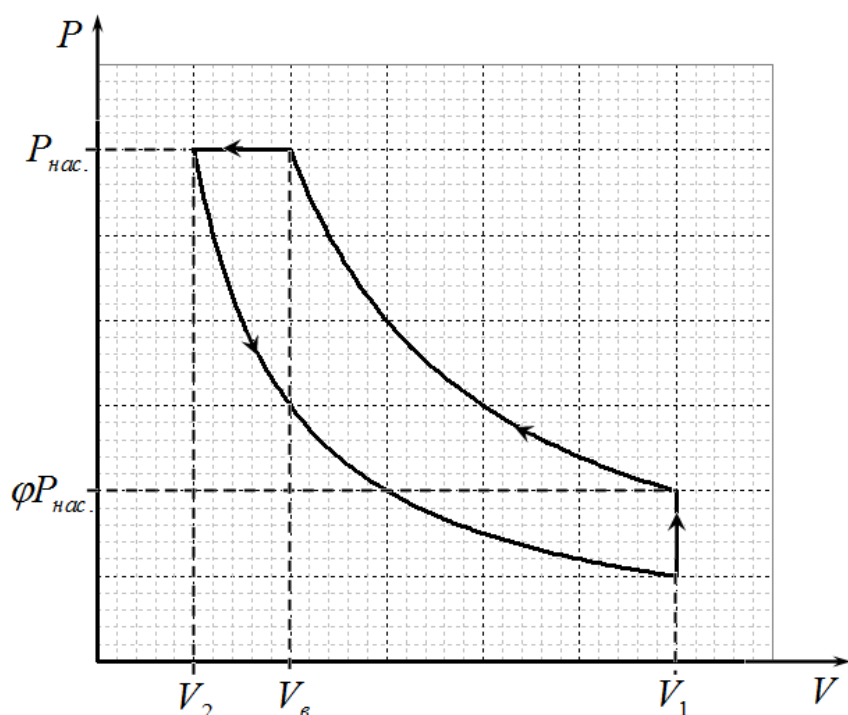


Рисунок 1 - Схематическая p-V диаграмма цикла

1.7 В ходе циклического процесса весь воздух в сосуде, пренебрегая парциальным давлением водяного пара, при сжатии и расширении проходит через одни те же состояния. Тогда работа, затраченное на сжатие и расширение всего воздуха по модулю совпадает и в сумме дает нуль. Следовательно, стоит присмотреться к работе, затраченной на процесс, произведенный непосредственно с водяным паром, даже если его парциальное давление незначительно (оно все же больше нуля). Последнюю можно рассчитать, как площадь, ограниченную построенной p-V диаграммой цикла.

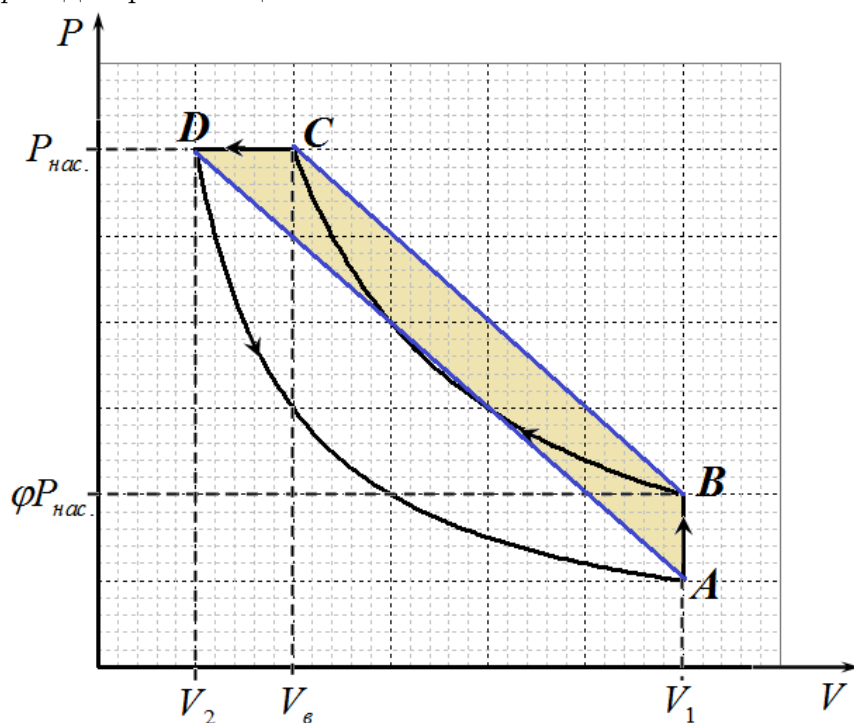


Рисунок 2 - Построения на диаграмме для расчета работы

Для грубой оценки этой работы «спрямим» криволинейные участки (рис. 2). Для расчета площади достроим фигуру до треугольника CED . Также нам понадобится давление в точке D . Его можно найти, используя уравнение изотермы BC : $p_{\text{н1}}V_2 = p_{\text{с}}V_1$. Отсюда: $p_{\text{D}} = p_{\text{н1}} \cdot V_2/V_1 = 1,57$ кПа. Работа Феи равна работе газа в ходе цикла, взятой со знаком минус. Учитывая тот факт, что цикл на диаграмме направлен против часовой стрелки, работа экспериментатора будет равна просто площади, ограниченной диаграммой $ABCD$, которую можно рассчитать как разность площадей треугольников:

$$A_A = S_{ABCD} = S_{CED} - S_{BEA} = \frac{1}{2}(CE \cdot DE - BE \cdot AE)$$

$$A_A = \frac{1}{2}((V_1 - V_2)(p_{\text{н1}} - p_{\text{D}}) - (V_1 - V_{\text{в}})(p_{\text{н1}} - \varphi p_{\text{н1}})) = 0,341 \text{ Дж}$$

1.8 Согласно определению введенной удельной работы конденсации получаем:

$$\theta_A = A_A/m_A = 37,7 \text{ кДж/кг}$$