

Условие

Задача 10- 2. Слоистые резисторы

Современные нанотехнологии позволяют создавать синтетические материалы с заданными физическими свойствами. Рассмотрим слоистый резистор в форме цилиндра длиной $l = 20$ см и радиусом $a = 2,0$ см, удельное сопротивление ρ материала которого изменяется от слоя к слою. Электрический ток пропускается между торцами цилиндра при помощи хорошо проводящих контактов, подключенных к источнику постоянного напряжения $U = 1,5$ В. Будем считать, что при нагревании проводника его удельное сопротивление остается постоянным. Порядок напыления слоёв может быть различным.

Примечание: согласно уравнению Фурье количество теплоты ΔQ , переносимое в некоторой среде вдоль оси Ox через площадку S за промежуток времени Δt равно

$$\Delta Q = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S \Delta t, \text{ где } \gamma = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/(^{\circ}\text{С} \cdot \text{м}) - \text{теплопроводность рассматриваемого материала (считай}$$

1. «Трубчатая структура» В этом варианте напыления слои следуют друг за другом от оси цилиндра, подобно системе тонкостенных трубок, вложенных одна в одну (см. рис). Радиусы слоев при этом постепенно увеличиваются. Напыляемый материал подбирается так, что удельное сопротивление $\rho(r)$ резистора увеличивается прямо пропорционально расстоянию r от данного слоя до оси цилиндра $\rho(r) = \alpha \cdot r$, где $\alpha = 6,4$ Ом – постоянная размерная величина.



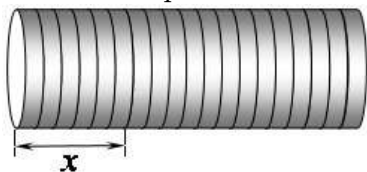
де
ю
м



1.1. Вычислите сопротивление R_1 такого резистора.

1.2. Найдите также силу тока I_1 и мощность выделяющейся теплоты P_1 при подключении этого резистора к источнику напряжения $U = 1,5$ В. Какая часть цилиндра больше нагреется при прохождении тока?

1.3. Найдите максимальную температуру $T_{\max 1}$ внутри резистора, если температура на его поверхности поддерживается постоянной и равной $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$. Считайте, что торцы цилиндра теплоизолированы.



2. «Блинная структура» При таком напылении тонкие слои одинакового поперечного сечения чередуются подобно «блинам», положенным друг на друга (см. рис). Рассмотрим слоистый резистор такой структуры, что его удельное сопротивление ρ линейно увеличивается с расстоянием x от правого края так, что $\rho(x) = \alpha \cdot x$, где $\alpha = 6,4$ Ом – постоянная размерная величина.

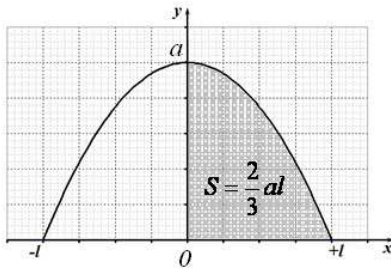
2.1. Вычислите сопротивление R_2 такого резистора.

2.2. Найдите также силу тока I_2 и мощность теплоты P_2 , выделяющейся на данном резисторе, при его подключении к источнику напряжения $U = 1,5$ В. Какая часть цилиндра нагреется больше при прохождении тока?

2.3. Найдите максимальную температуру $T_{\max 2}$ внутри резистора, если температура его левого торца поддерживается постоянной $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Считайте, что боковая поверхность цилиндра и его правый торец теплоизолированы.

2.4. Вычислите электрический заряд q^* , накопившийся внутри резистора в установившемся режиме протекания тока.

Подсказка (может понадобится!). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком параболической зависимости $y(x) = a(1 - \frac{x^2}{l^2})$ и осью абсцисс (см. рис) на участке $(0; +l)$ вычисляется по формуле $S = \frac{2}{3}al$.



Решение

Задача 10- 2. Слоистые резисторы



1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толщины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i ($\Delta r_i \ll r_i$).



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \frac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l \rho_i} = \frac{2\pi}{\rho l} \sum_{i=1}^n \Delta r_i = \frac{2\pi a}{\rho l}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки. Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{\rho l}{2\pi a} = 10 \text{ Ом}. \quad (2)$$

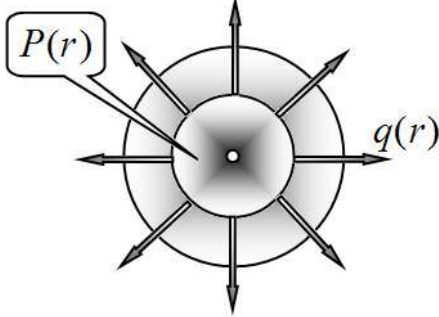
1.2 Сила тока через резистор в этом случае

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{\rho l} U = 0,15 \text{ А}. \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U^2 = 0,23 \text{ Вт.} \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.



1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi rl$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого

резистора и коаксиального с ним, пропорциональна радиусу этого цилиндра. Поэтому выражение для мощности теплоты, выделяющейся внутри выделенного цилиндра, аналогично формуле (4). Тогда уравнение для потока теплоты будет иметь вид

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\alpha l} U^2 = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot S = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot 2\pi rl \Rightarrow \Delta T = -\frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} \Delta r. \quad (5)$$

Согласно (5) приращение температуры данного слоя обратно по знаку приращению радиуса резистора, т.е. температура внутри него падает при увеличении r . Это означает, что максимальная температура резистора будет на его оси симметрии. Так и должно быть, поскольку теплота самопроизвольно перетекает от горячего слоя к холодному, а не наоборот

Суммируя (5) по всем слоям, найдем, что максимальная температура $T_{\max 1}$ в центре резистора будет равна

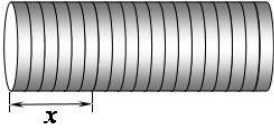
$$T_{\max 1} = T_0 - \Delta T = T_0 + \frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} a = 46^\circ \text{C}. \quad (6)$$

2. «Блинная структура»

3.

2.1 Рассмотрим блинную структуру. В этом случае сопротивление зависит от расстояния по закону $\rho(x) = \alpha \cdot x$, следовательно, для вычисления сопротивления последовательно соединенных «блинов» справедливо выражение

$$R_2 = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta x_i}{S} = \frac{\alpha}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i = \frac{\alpha l^2}{2S} = \frac{\alpha l^2}{2\pi a^2} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Ом} = 0,10 \text{ кОм}. \quad (7)$$



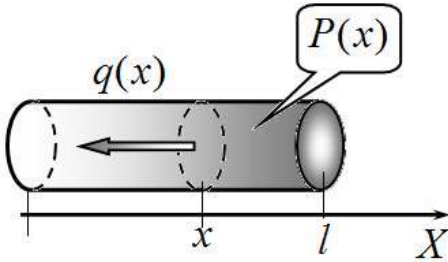
2.2 Силу тока в резисторе найдём по закону Ома

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U = 15 \text{ мА} \quad (8)$$

Согласно закону Джоуля-Ленца мощность тока, выделяемая в таком проводнике

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U^2 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} = 23 \text{ мВт} . \quad (9)$$

Поскольку удельное сопротивление возрастает слева направо, то при прохождении тока больше нагреется правый конец цилиндра, где его удельное сопротивление больше.



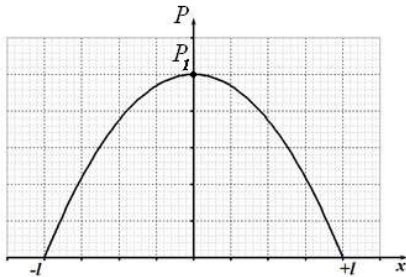
2.3 Как следует из формулы (7), сопротивление резистора на участке от x до l равно $R_{l-x} = \frac{\alpha}{2S}(l^2 - x^2)$. Поскольку сила тока в любом поперечном сечении резистора одинакова, то мощность тока, выделяемая на рассматриваемом участке резистора длиной $l - x$, может быть найдена как

$$P_{l-x} = I_2^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \left(\frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U \right)^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2) . \quad (10)$$

График этой функции представляет собой параболу (см. рис.), ветви которой направлены вниз.

В установившемся режиме тепловой поток $q(x)$, проходящий через поперечное сечение проводника на расстоянии x от его конца (см. рис) должен быть равен мощности, выделяющейся справа от рассматриваемого сечения (10), иначе температура резистора продолжила бы меняться. Согласно закону Фурье для теплопередачи

$$q(x) = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S = P_{l-x} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2) . \quad (11)$$



Выражая из (12) малое приращение температуры, получим

$$\Delta T = -\frac{2\pi a^2 U^2}{S\gamma\alpha l^4}(l^2 - x^2)\Delta x . \quad (12)$$

Знак «-» в (12) говорит о том, что тепловой поток направлен против положительного направления оси Ox .

Суммируя (12), получим, что повышение температуры правого конца стержня пропорционально площади под графиком параболы. С учетом замечания из условия задачи, имеем

$$T_{\max 2} = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2\pi a^2 U^2}{\gamma\alpha l^4} \sum (l^2 - x_i^2)\Delta x_i = T_0 + \frac{2U^2}{\gamma\alpha l^2} \cdot \frac{2}{3}l = 370^\circ\text{C} = 3,7 \cdot 10^2 \text{C} . \quad (13)$$

2.4 В рассматриваемом случае плотность тока ($j = I/S$, $[j] = \text{А/м}^2$) не меняется вдоль резистора, поскольку площадь его поперечного сечения остается постоянной. Так как удельное сопротивление рассматриваемого резистора изменяется, то должна изменяться и напряженность поля внутри цилиндра, что возможно только при накоплении объемных зарядов внутри него! Согласно закону Ома в дифференциальной форме (для плотности тока) можем записать

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot E \Rightarrow E = \rho \cdot j , \quad (14)$$

где E – напряженность электрического поля в данном сечении резистора. С учетом зависимости $\rho(x) = \alpha \cdot x$ получаем

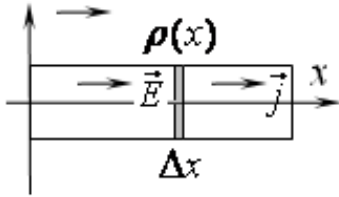
$$E(x) = \alpha x \cdot \frac{I_2}{S} = \frac{2U}{l^2} \cdot x . \quad (16)$$

Следовательно, для приращения напряженности электрического поля справедливо выражение

$$\Delta E = j \cdot \Delta \rho . \quad (15)$$

Приращение напряженности поля связано с объемным зарядом, «сидящим» на малом слое проводника толщиной Δx

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{\varepsilon_0} \Rightarrow j \Delta \rho = \frac{\rho^* \Delta x}{\varepsilon_0} \quad \rho^* = \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \varepsilon_0 j . \quad (16)$$



При выводе этого соотношения использована формула для напряженности поля, создаваемого тонким слоем заряда.

2.6 Используя (16), суммируя по слоям, найдем полный заряд, «сидящий» внутри резистора на всем его протяжении

$$q^* = \sum_{i=1}^n q_i^* = \sum_{i=1}^n \rho_i^* S \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_0 j S \Delta \rho_i = \varepsilon_0 j S \sum_{i=1}^n \Delta \rho_i = \varepsilon_0 I \alpha l = \frac{2\pi \varepsilon_0 a^2}{l} U = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Кл} . \quad (17)$$

Интересно, что согласно (18), это соответствует динамической емкости резистора

$$C = \frac{q^*}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{l} = \frac{2\varepsilon_0 S}{l} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ Ф} = 0,11 \text{ пФ}. \quad (18)$$